Lineární závislost a nezávislost

Def.: Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Vektory $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \in V$ jsou lineárně závislé, jestliže existují reálná čísla $k_1, k_2, \dots, k_n$ z nichž je alespoň jedno nenulové (tj. $\exists k_i \neq 0$) a platí:

$$k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \dots + k_n \bar{v}_n = \bar{o} \qquad (*)$$

V případě, že rovnice $(*)$ je splněna jen pro $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, říkáme, že vektory $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Př.: Rozhodněte o lineární závislosti vektorů $(1,-1,3)$, $(2,-2,6)$ a $(1,2,8)$.

$$-2\cdot(1,-1,3) + 1\cdot(2,-2,6) + 0\cdot(1,2,8) = (0,0,0) = \bar{o}$$

$\Rightarrow$ Vektory jsou lineárně závislé.

Př.: Rozhodněte o lineární závislosti vektorů $(1,2,0)$, $(-1,2,1)$, $(1,1,1)$.

α) Podle definice: Hledáme $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$: $k_1(1,2,0) + k_2(-1,2,1) + k_3(1,1,1) = (0,0,0)$

To vede na soustavu lin. rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ \cdot(-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 = 0 \\ \Rightarrow k_2 = 0 \\ \Rightarrow k_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ jediné řešení $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ $\Rightarrow$ lin. nezávislé

β) Jiný postup: Neřešíme žádnou soustavu! Jen vektory napíšeme do řádků matice a upravíme na schodový tvar. Pokud se nějaký řádek vynuluje, jsou závislé, když ne, jsou nezávislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ +r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 4 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Žádný nulový řádek $\Rightarrow$ lin. nezávislé

Poznámka: Při postupu β) je důležité upravit matici do schodového tvaru! Nuly pod diagonálou nemusí stačit!

Př: Rozhodněte o lineární závislosti vektorů:

1.) $\vec{v}_1 = (1,1,2)$; $\vec{v}_2 = (1,1,3)$; $\vec{v}_3 = (2,2,8)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{není to schodový tvar!}} \begin{matrix} \\ \\ -4r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ jsou lin. závislé}$$

2.) $\vec{v}_1 = (1,0,-1,1)$; $\vec{v}_2 = (1,0,1,2)$; $\vec{v}_3 = (-1,0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ jsou lin. nezávislé}$$

3.) $\vec{v}_1 = x^2 - x + 1$; $\vec{v}_2 = 2x^2 - x + 1$; $\vec{v}_3 = 3x^2 - 2x + 3$

$(1,-1,1)$ $(2,-1,1)$ $(3,-2,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ jsou lin. nezávislé}$$

4.) $\vec{v}_1 = 2x^2 - x + 1$; $\vec{v}_2 = -x + 1$; $\vec{v}_3 = x^2 - 2x + 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \updownarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lin. závislé}$$

5.) $\vec{v}_1 = (1,-1,3)$, $\vec{v}_2 = (2,-2,6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lin. závislé}$$

DVA VEKTORY JSOU LIN. ZÁV. KDYŽ JE JEDEN NÁSOBEK DRUHÉHO

6.) $\vec{v}_1 = (1,0,2)$ $\vec{v}_2 = (1,1,-1)$ $\vec{v}_3 = (2,0,5)$, $\vec{v}_4 = (1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -2r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{závislé!}$$

VÍCE NEŽ 3 VEKTORY Z $\mathbb{R}^3$ JSOU JISTĚ LIN. ZÁVISLÉ