Báze vektorového prostoru

Def (Báze): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad R. Množina $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq V$ tvoří bázi V právě tehdy, když platí

1.) $V = \langle B \rangle = \{\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R\}$

(tj. každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z B)

2.) Vektory $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad: Vezmeme $\mathbb{R}^3$. Ukážeme, že $B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

ad 1.) Libovolný vektor $(v_1, v_2, v_3) \in V$ můžeme napsat ve tvaru

$$(v_1, v_2, v_3) = v_1 \cdot (1,0,0) + v_2 (0,1,0) + v_3 (0,0,1)$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \langle B \rangle$

ad 2.) $\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ matice je již v trojúhelníkovém tvaru a není v ní žádný nulový řádek $\Rightarrow$ jsou to lineárně nezávislé vektory

$\Rightarrow B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$

(samozřejmě existují i jiné báze $\mathbb{R}^3$)

Příklad: Vezmeme $V = M_{(2,2)}$. Dokažte, že bázi $M_{(2,2)}$ tvoří

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1 \\ 0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0 \\ 1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&1 \end{pmatrix} \right\}$

ad 1.) Libovolnou matici $\begin{pmatrix} a&b \\ c&d \end{pmatrix} \in M_{(2,2)}$ můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a&b \\ c&d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0&1 \\ 0&0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0&0 \\ 1&0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}$$

tj. každý prvek z $M_{(2,2)}$ můžeme napsat jako lineární kombinaci vektorů z B

$\Rightarrow M_{(2,2)} = \langle B \rangle$

ad 2.) Ověříme lineární nezávislost prvků z B podle definice.

Zjistíme, pro které $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ platí

$$\underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0&1 \\ 0&0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0&0 \\ 1&0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}}_{\parallel} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&0 \end{pmatrix}}_{\bar{o}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&0 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0 \Rightarrow$ prvky z B jsou lineárně nezávislé

Věta: Každé dvě báze daného vektorového prostoru V mají stejný počet prvků.

Def. (Dimenze): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor a $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ jeho báze. Potom n (počet prvků báze) nazýváme dimenzí vektorového prostoru V a značíme

$$\dim V = n$$

Věta: Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor a $\dim V = n$. Potom každá n-tice lineárně nezávislých vektorů tvoří bázi V.

Příklad: $V = \mathbb{R}^3$. Již víme, že $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$. Proto $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Dokažte, že $(1,2,0)$, $(-1,1,0)$, $(0,0,1)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

Podle předchozí věty stačí dokázat, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ => žádný nulový řádek => jsou nezávislé

=> $\underline{(1,2,0);\ (-1,1,0);\ (0,0,1)}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$

Př: Ověřte, zda $\vec{u}_1 = x^2+1$, $\vec{u}_2 = x+1$, $\vec{u}_3 = x^2+x$ tvoří bázi $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

! **Př:** Naleznete bázi a dimenzi vektorového prostoru
$V = \{(x_1,x_2,x_3) \in V \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

$\underline{2x_1 - x_2 + x_3 = 0}$ ... soustava 1 rovnice o 3 neznámých => volíme 2 parametry:

$x_3 = r$; $x_2 = s$ => $2x_1 - s + r = 0$ => $x_1 = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r$

=> $V = \{(x_1,x_2,x_3) \in V \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\} = \{(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r, s, r) \mid s, r \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\frac{1}{2}s, s, 0) + (-\frac{1}{2}r, 0, r) \mid s, r \in \mathbb{R}\} = \{s(\frac{1}{2}, 1, 0) + r(-\frac{1}{2}, 0, 1) \mid s, r \in \mathbb{R}\}$ =>

1.) každý vektor z V je možno napsat jako lin. komb. vektorů $(\frac{1}{2},1,0)$ a $(-\frac{1}{2},0,1)$

2.) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ => jsou lin. nezávislé

vektory $(\frac{1}{2},1,0)$, $(-\frac{1}{2},0,1)$ => tvoří bázi V

$\underline{\dim V = 2}$

Př. Ověřte, zda je $(U,+,\cdot)$ podprostorem vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$. Pokud ano, nalezněte bázi a dimenzi $(U,+,\cdot)$.

1.) $U = \{(3, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - 2x_3 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

$U \subseteq \mathbb{R}^3$, ale například $(3,0,0) \in U$ a také $(3,2,1) \in U$,
ale $(3,0,0) + (3,2,1) = (6,2,1) \notin U$ $\Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ není podprostorem $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

2.) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0;\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

Vyřešíme soustavu ($U \subseteq \mathbb{R}^3$ je splněno):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 - s = 0 \Rightarrow x_1 = s \\ \Rightarrow 3x_2 - x_3 = 0 \text{ zvolím } x_2 = s \Rightarrow x_3 = 3s \end{array}$$

$\Rightarrow U = \{(s, s, 3s \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s(1,1,3) \mid s \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,3) \rangle$

U je lineárním obalem vektoru $(1,1,3)$; lin. obal je vždy podprostor $\Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ báze $U = \{(1,1,3)\}$ $\dim U = 1$

3.) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

vyřešíme soustavu ($U \subseteq \mathbb{R}^3$ je splněno):

$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \Rightarrow$ zvolíme parametry: $x_3 = s \in \mathbb{R}$, $x_2 = s \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}s$

$\Rightarrow U = \{(\frac{3}{2}s - \frac{5}{2}s, s, s) \mid s, s \in \mathbb{R}\} = \{s(\frac{3}{2}, 1, 0) + s(-\frac{5}{2}, 0, 1) \mid s, s \in \mathbb{R}\} =$
$= \langle (\frac{3}{2}, 1, 0); (-\frac{5}{2}, 0, 1) \rangle =$ lin. obal. $\Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

Ověříme, zda jsou vektory $(\frac{3}{2},1,0)$ a $(-\frac{5}{2},0,1)$ lin. nezávislé:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot 10 \\ \cdot 6 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 \\ -15 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ +r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ jsou nezávislé $\Rightarrow$ tvoří bázi $U \Rightarrow$

báze $U = \{(\frac{3}{2},1,0); (-\frac{5}{2},0,1)\}$ $\dim U = 2$

4.) $U = \{ax^2 + ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$; $V = P_2$

$U \subseteq P_2$ je splněno a platí:

$U = \{a(x^2+x) + b \cdot 1 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \langle x^2+x ; 1 \rangle$ = lin. obal $\Rightarrow$

$(U, +, \cdot)$ je podprostorem $(P_2, +, \cdot)$

$\begin{array}{l} x^2+1 \to \\ 1 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ polynomy x^2+1 a 1 jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow$

báze $U = \{x^2+x ; 1\}$ $\quad$ $\dim U = 2$

5.) $U = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 - a_0 = 0,\ a_2 + a_1 = 0\}$; $V = P_2$

$U \subseteq P_2$ je splněno a platí:

$$\begin{array}{l} a_2 - a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_2 & a_1 & a_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_2 & a_1 & a_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow a_2 + s = 0 \Rightarrow a_2 = -s \\ a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = s \in \mathbb{R} \quad a_0 = -s \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow U = \{-sx^2 + sx - s \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s(-x^2+x-1) \mid s \in \mathbb{R}\} = \langle -x^2+x-1 \rangle \Rightarrow$

$(U, +, \cdot)$ je podprostorem $(P_2, +, \cdot)$ $\quad$ báze $U = \{-x^2+x-1\}$ $\quad$ $\dim U = 1$

6.) $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 3x_2 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

$U \nsubseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow (U, +, \cdot)$ není podprostorem $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

7.) $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 3x_2 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^2$

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ je splněno a platí:

$x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = s,\ x_1 = 3s \Rightarrow$

$U = \{(3s, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s(3,1) \mid s \in \mathbb{R}\} = \langle (3,1) \rangle \Rightarrow$

$(U, +, \cdot)$ je podprostorem $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ $\quad$ báze $U = \{(3,1)\}$ $\quad$ $\dim U = 1$