Souřadnice vektoru

Def. (Souřadnice): Nechť $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\} \subseteq V$ je báze vektorového prostoru V. (nad $\mathbb{R}$)
Souřadnicemi vektoru $\bar{v} \in V$ vzhledem k bázi E nazveme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

symbolicky zapisujeme: $\bar{v}_{\langle E \rangle} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Př: Určete souřadnice vektoru $\bar{v} = (2,0,4) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi

a) $E = \{\overbrace{(1,0,0)}^{\bar{e}_1}; \overbrace{(0,1,0)}^{\bar{e}_2}; \overbrace{(0,0,1)}^{\bar{e}_3}\}$

b) $F = \{\underbrace{(1,0,1)}_{\bar{f}_1}; \underbrace{(-1,3,0)}_{\bar{f}_2}; \underbrace{(0,0,1)}_{\bar{f}_3}\}$

ad a) Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$$

tzn.: $(2,0,4) = \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,0) + \alpha_3 (0,0,1)$

snadno se rozmyslí, že $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 4$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\bar{v}_{\langle E \rangle} = (2,0,4)}}$

ad b) Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + \alpha_3 \bar{f}_3$$

tzn.: $(2,0,4) = \alpha_1 (1,0,1) + \alpha_2 (-1,3,0) + \alpha_3 (0,0,1)$

$(2,0,4) = (\alpha_1, 0, \alpha_1) + (-\alpha_2, 3\alpha_2, 0) + (0,0,\alpha_3)$

$(2,0,4) = (\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3)$

Vektory v $\mathbb{R}^3$ jsou si rovny, pokud mají stejné souřadnice $\Rightarrow$ musí platit:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2$$
$$3\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 4$$

Řešením této soustavy obdržíme $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$ $\Rightarrow$

$\underline{\underline{\bar{v}_{\langle F \rangle} = (2,0,2)}}$

Př.: Nechť ~~$V = P_3 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$~~ $V = P_3 = \{f \mid f(x) = ax^2+bx+c \,;\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Určete souřadnice vektoru (funkce) f dané předpisem $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ vzhledem k bázi

a) $\bar{e}_1 = x^2$, $\bar{e}_2 = x$, $\bar{e}_3 = 1$

b) $\bar{f}_1 = x^2 + x$, $\bar{f}_2 = x^2 + 1$, $\bar{f}_3 = x + 1$

ad a) Evidentně $f = 3 \cdot \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3 \Rightarrow f_{\langle E \rangle} = (3, -2, 1)$

ad b) Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak aby

$$f = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + \alpha_3 \bar{f}_3$$

tj aby: $3x^2 - 2x + 1 = \alpha_1 (x^2 + x) + \alpha_2 (x^2 + 1) + \alpha_3 (x + 1)$

$3x^2 - 2x + 1 = (\alpha_1 + \alpha_2) x^2 + (\alpha_1 + \alpha_3) x + \alpha_2 + \alpha_3$

$\Rightarrow$ musí platit

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= -2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \end{aligned} \quad = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_3 &= -2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_{\langle F \rangle} = (0, 3, -2)$

Př. Určete souřadnice vektoru $\bar{v}$ vzhledem k bázi B.

1.) $\bar{v} = (-1,3,8)$; $B = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ ... kanonická báze v $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ (standardní)

$$\bar{v} = (-1,3,8) = -1\cdot(1,0,0) + 3(0,1,0) + 8(0,0,1) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\bar{v}_{\langle B\rangle} = (-1,3,8)}}$$

2.) $\bar{v} = (3,1,0)$; $B = \{(1,2,0);(-1,2,1);(1,1,1)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2r_1 \\ \cdot 4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} k_1+1+1=3 \Rightarrow k_1=1 \\ 4k_2-1=-5 \Rightarrow k_2=-1 \\ \Rightarrow 5k_3=5 \Rightarrow k_3=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow (3,1,0) = 1\cdot(1,2,0) - 1\cdot(-1,2,1) + 1\cdot(1,1,1) \Rightarrow \underline{\underline{(3,1,0)_{\langle B\rangle} = (1,-1,1)}}$$

3.) $\bar{v} = -5x^2+3$; $B = \{x^2, x, 1\}$ ... kanonická báze v $(P_2,+,\cdot)$

$$-5x^2+3 = -5\cdot(x^2) + 0\cdot(x) + 3\cdot(1)$$

$$\underline{\underline{-5x^2+3_{\langle B\rangle} = (-5,0,3)}}$$

4.) $\bar{v} = 6x+7$; $B = \{x^2+x+3,\ x^2+1,\ x+1\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1-1=0 \quad \Rightarrow k_1=1 \\ \Rightarrow -k_2+5=6 \Rightarrow k_2=-1 \\ \Rightarrow k_3=5 \end{array}$$

$$\Rightarrow 6x+7 = 1\cdot(x^2+x+3) - 1\cdot(x^2+1) + 5(x+1) \Rightarrow \underline{\underline{6x+7_{\langle B\rangle} = (1,-1,5)}}$$

Báze vektorového prostoru

Množina vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ tvoří bázi vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$

$\Leftrightarrow$ 1.) $\forall \vec{x} \in V \;\; \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}: \quad \vec{x} = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n$

2.) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jsou lineárně nezávislé

Pozn.: Jestliže $\dim V = n \Rightarrow$ každá n-tice lineárně nezávislých vektorů z V je báze $(V, +, \cdot)$

Př.: Ověřte, zda vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ tvoří bázi vekt. prostoru V

1.) $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 3)$, $V = \mathbb{R}^3$ [ne]

2.) $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, 5)$, $V = \mathbb{R}^3$ [ano]

3.) $\vec{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, -1)$, $V = \mathbb{R}^3$ [ne]

4.) $\vec{v}_1 = x^2 - 2x$, $\vec{v}_2 = -x^2 + 2x - 1$, $\vec{v}_3 = x$, $V = P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ [ano]

5.) $\vec{v}_1 = x^3 - x^2$, $\vec{v}_2 = x^3 - x$, $\vec{v}_3 = x^2 - x$, $\vec{v}_4 = x - 1$, $V = P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ [ne]

Př.: Ověřte, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostor $(V, +, \cdot)$. Pokud ano, nalezněte jeho bázi a dimenzi.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ [$U = \langle (1, 0, 2); (0, 1, -1) \rangle$, $\dim U = 2$]

b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$ [$U = \langle (-1, 1, 0, 0); (1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1) \rangle$, $\dim U = 3$]

c) $V = P_2$, $U = \{ax^2 + ax + c \mid a, c \in \mathbb{R}\}$ [$U = \langle x^2 + x, 1 \rangle$, $\dim U = 2$]

Př.: Určete souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi B.

a) $\vec{v} = (1, 5, 8)$ $\quad B = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (0, 1, 3)\}$ $\quad [\vec{v}_{\langle B \rangle} = (1, 2, 2)]$

b) $\vec{v} = (2, 6, 2)$ $\quad B = \{(1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ $\quad [\vec{v}_{\langle B \rangle} = (2, 0, 2)]$

c) $\vec{v} = x^2 + 1$ $\quad B = \{x^2 - 2x + 1, -x^2 + x + 1, x^2 + x - 1\}$ $\quad [\vec{v}_{\langle B \rangle} = (1, 1, 1)]$

d) $\vec{v} = 5x^2 + x - 2$ $\quad B = \{2x^2 - 1, x^2 + x, -2x + 2\}$ $\quad [\vec{v}_{\langle B \rangle} = (2, 1, 0)]$