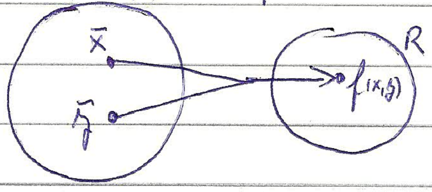
Bilineární forma

$(V,+,\cdot)$ ... vekt. pr. nad R



platí: 1.) $f(\bar{x}+\bar{y},\bar{z}) = f(\bar{x},\bar{z}) + f(\bar{y},\bar{z})$

2.) $f(\bar{x},\bar{y}+\bar{z}) = f(\bar{x},\bar{y}) + f(\bar{x},\bar{z})$

3.) $f(\alpha\bar{x},\bar{y}) = \alpha f(\bar{x},\bar{y})$

4.) $f(\bar{x},\alpha\bar{y}) = \alpha f(\bar{x},\bar{y})$

<u>Př:</u> Bilineární forma je dána předpisem $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$, kde $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ a $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Určete matici b.f. f vzhledem ke standardní bázi S.

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Určete matici b.f. f vzhledem k bázi $G = \{(1,1,0);(0,1,2);(0,0,3)\}$

$$B_{f\langle G\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -2 & 14 & 21 \\ -3 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

c) Určete $f((1,-1,0),(0,-1,3))$

α) pomocí $B_{f\langle S\rangle}$: $f((1,-1,0);(0,-1,3)) = (1,-1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (1,0,-3)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -9$

β) podle předpisu: $f((\underset{x_1}{1},\underset{x_2}{-1},\underset{x_3}{0});(\underset{y_1}{0},\underset{y_2}{-1},\underset{y_3}{3})) = 1\cdot 0 + 3(-1)\cdot 3 - (0)\cdot 0 + 2\cdot 0 = -9$

γ) ověřte, že postup α) je korektní

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_1-x_3,\ 0,\ 3x_2+2x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{x_1y_1 - x_3y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3}_{= f(\bar{x},\bar{y}) \text{ podle zadání}}$$

Př: Bilineární forma je dána předpisem $f(\bar{x},\bar{y}) = 3x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - 3x_3y_2$, kde $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Určete matici bilineární formy f vzhledem ke standardní bázi S.

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Určete matici $B_{f\langle G\rangle}$, kde $G=\{(1,0,-1),(0,3,0);(1,0,2)\}$

$$B_{f\langle G\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & -18 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Určete $f((3,1,4);(2,1,-5))$

$$f((3,1,4);(2,1,-5)) = (3,1,4)\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = (9,-11,-3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 18-11+15 = 22$$

Př. Bilineární forma $f: P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(g(x), h(x)) = 2g(1)h(3)$.

a) Určete matici b.f. f vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$

Upravme předpis: $g(x) = x_1x^2 + x_2x + x_3 \Rightarrow g(x)_{\langle S\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$

$h(x) = y_1x^2 + y_2x + y_3 \Rightarrow h(x)_{\langle S\rangle} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\Rightarrow f(g(x), h(x)) = f(\underbrace{x_1x^2+x_2x+x_3}_{g(x)}, \underbrace{y_1x^2+y_2x+y_3}_{h(x)}) = 2\underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{g(1)}\underbrace{(y_1 9 + y_2 3 + y_3)}_{h(3)} =$$

$$\begin{aligned}
&= 18x_1y_1 + 6x_1y_2 + 2x_1y_3 + \\
&+ 18x_2y_1 + 6x_2y_2 + 2x_2y_3 + \\
&+ 18x_3y_1 + 6x_3y_2 + 2x_3y_3
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Určete matici $B_{f\langle H\rangle}$, kde $H = \{(1,1,1); (0,1,-1); (0,0,1)\}$

$$B_{f\langle H\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 26 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Určete $f(3x^2-1, 2x+3)$

α) podle předpisu: $f(3x^2-1, 2x+3) = 2(3\cdot 1^2-1)(2\cdot 3+3) = 2\cdot 2\cdot 9 = \underline{36}$

β) pomocí $B_{f\langle S\rangle}$: $f(3x^2-1, 2x+3) = (3, 0, -1)\begin{pmatrix} 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (36, 12, 4)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 24 + 12 = \underline{\underline{36}}$

Def (Symetrická, Antisymetrická bilin. forma): Bilineární forma $f: V \times V \to T$ je symetrická jestliže $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ platí:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{v}, \bar{u})$$

Bilineární forma $f: V \times V \to T$ je antisymetrická jestliže $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ platí:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = -f(\bar{v}, \bar{u})$$

Věta: Bilineární forma je symetrická $\Leftrightarrow$ její matice B_f je symetrická.
Bilineární forma je antisymetrická $\Leftrightarrow$ její matice B_f je antisymetrická.

Poznámka: Každou bilineární formu můžeme rozložit na součet symetrické a antisymetrické bilineární formy:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = f_s(\bar{u}, \bar{v}) + f_a(\bar{u}, \bar{v})$$

symetrická část f antisymetrická část f

f_s a f_a určíme:

$$f_s(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}\left(f(\bar{u}, \bar{v}) + f(\bar{v}, \bar{u})\right)$$

$$f_a(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}\left(f(\bar{u}, \bar{v}) - f(\bar{v}, \bar{u})\right)$$

$\Rightarrow$ Matice symetrické a antisymetrické části určíme:

$$B_{f_s} = \frac{1}{2}\left(B_f + B_f^T\right)$$

$$B_{f_a} = \frac{1}{2}\left(B_f - B_f^T\right)$$

Př: Nalezněte symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy

$$f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$$

$$\Rightarrow \quad B_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B_f^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B_{fs} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{f_s(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + \frac{5}{2}x_1y_2 + \frac{5}{2}x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3}}$$

$$\Rightarrow \quad B_{fa} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{f_a(\bar{x},\bar{y}) = -\frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1}}$$