Kvadratická forma

Def (Kvadratická f.): Nechť $f: V \times V \to \mathbb{R}$ je bilineární forma. Kvadratickou formou příslušnou k bilineární formě f nazveme zobrazení $Q_f: V \to R$ dané předpisem: $\forall \bar{x} \in V$ platí

$$Q_f(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x})$$

Pozn.: Do bilineární formy f „dosazujeme" vektory $\bar{x}$ a $\bar{y}$ (mohou být různé). Kvadratickou formu dostaneme z f tak, že do ní budeme „dosazovat" vždy dva stejné vektory, tj. $\bar{x}$ a $\bar{x}$.

Př: Nalezněte kvadratickou formu příslušnou k bilineární formě
$$f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$$

$$\Rightarrow Q_f(\bar{x}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tj. } \bar{x}=\bar{y} \Rightarrow y_1=x_1,\ y_2=x_2,\ y_3=x_3}}{f(\bar{x}, \bar{x})} = x_1x_1 - x_1x_2 + 3x_2x_1 + 2x_2x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_2 + 5x_3x_3 = x_1^2 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

Poznámka: Maticí kvadratické formy nazveme matici symetrické bilineární formy, k níž kvadratická forma náleží, tj.:

$$Q_f(\bar{x}) = f_s(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}_{\langle E\rangle} \cdot \underbrace{(Q_f)_{f_s\langle E\rangle}}_{\uparrow \text{ matice kvadratické formy}} \cdot \bar{x}^T_{\langle E\rangle}$$

Př: Nalezněte matici kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi E $Q_f(\bar{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$, kde $\bar{x} = (x_1x_2x_3)_{\langle E\rangle}$ a symetrickou bilineární formu, k níž Q_f náleží

$\Rightarrow$

Matici $(Q_{f_s\langle E\rangle})$ určíme z koeficientů v předpisu, ale pozor! $x_1x_2 = x_2x_1 \Rightarrow$ číslo před x_1x_2 rozdělíme napůl a jednu půlku dáme do 1. řádky 2. sloupce a druhou půlku dáme do 2. řádku 1. sloupce. Obdobně u x_1x_3 a $x_2x_3 \Rightarrow$

$$\left(Q_{f_s}\right)_{\langle E\rangle} = \begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&-3&3\\2&3&5\end{pmatrix}$$

(=> například $Q_f((1,-1,2)) = (1,-1,2)\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&-3&3\\2&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = (1,-1,2)\begin{pmatrix}6\\8\\9\end{pmatrix} = 6-8+18 = \underline{16}$)

Toto je matice symetrické bilineární formy f_s k níž Q_f přísluší =>

$$f_s(\bar x,\bar y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 - 3x_2y_2 + 3x_2y_3 + 2x_3y_1 + 3x_3y_2 + 5x_3y_3$$

Poznámka: Matici kvadratické formy Q_f vzhledem k bázi $E=\{\bar e_1,\bar e_2,\dots,\bar e_n\}$ (může být i jiná, než standardní), nalezneme takto:

1.) Nalezneme symetrickou bilineární formu $f_s(u,v)$ k níž Q_f přísluší
(např. podle vztahu: $f_s(\bar u,\bar v) = \frac{1}{2}\left(Q_f(\bar u+\bar v) - Q_f(\bar u) - Q_f(\bar v)\right)$)

2.)
$$\left(Q_{f_s}\right)_{\langle E\rangle} = \begin{pmatrix} f(\bar e_1,\bar e_1) & f(\bar e_1,\bar e_2) & \cdots & f(\bar e_1,\bar e_n)\\ f(\bar e_2,\bar e_1) & f(\bar e_2,\bar e_2) & \cdots & f(\bar e_2,\bar e_n)\\ \vdots & & & \\ f(\bar e_n,\bar e_1) & f(\bar e_n,\bar e_2) & \cdots & f(\bar e_n,\bar e_n)\end{pmatrix}$$

Př: Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f(\bar x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ vzhledem k bázi $E = \{\bar e_1 = (1,1),\ \bar e_2 = (1,-1)\}$.

=> ad 1.) Symetrická bilin. forma f_s k níž Q_f náleží má vzhledem ke standardní bázi matici

$$\left(Q_{f_s}\right)_{\underset{\text{st. báze}}{\langle S\rangle}} = \begin{pmatrix}4&-2\\-2&3\end{pmatrix}_{\langle S\rangle} \Rightarrow f_s(\bar x,\bar y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

, kde $\bar x = (x_1,x_2)_{\langle S\rangle}$, $\bar y = (y_1,y_2)_{\langle S\rangle}$

ad 2.) $f_s(\bar e_1,\bar e_1) = f_s((\overset{x_1}{1},\overset{x_2}{1}),(\overset{y_1}{1},\overset{y_2}{1})) = 4\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot1 + 3\cdot1\cdot1 = 4-2-2+3 = \underline{3}$

$f_s(\bar e_2,\bar e_1) = f_s((\underset{x_1}{1},\underset{x_2}{-1}),(\underset{y_1}{1},\underset{y_2}{1})) = 4\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot1 - 2(-1)\cdot1 + 3(-1)1 = \underline{1}$

$f_s(\bar e_2,\bar e_2) = f((1,-1),(1,-1)) = \underline{11}$

Protože f_s je symetrická, je $f(\bar{e}_1,\bar{e}_2) = f(\bar{e}_2,\bar{e}_1) = 1$ =>

$$(Q_{f_s})_{\langle E\rangle} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Př: Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : P_3 \to \mathbb{R}$, dané předpisem
$Q_f(g) = g(0)\,g(1)$
a) vzhledem ke standardní bázi $E = \{x^2, x, 1\}$
b) vzhledem k bázi $F = \{x^2+x,\ x^2+1,\ x+1\}$

ad a) Nejprve určíme matici Q_f vzhledem k standardní bázi $E = \{e_1 = x^2, e_2 = x, e_3 = 1\}$
Využijeme toho, že

$$Q_f(\bar{x}) = \underbrace{\bar{x}_{\langle E\rangle}}_{\uparrow\ \text{souřadnice vzhledem k bázi } \langle E\rangle} (Q_{f_s})_{\langle E\rangle}\, \bar{x}^T_{\langle E\rangle} = \sum_i \sum_j \underbrace{f_s(e_i, e_j)\, x_i x_j}_{\text{čísla před } x_i x_j \text{ tvoří matici } (Q_{f_s})_{\langle E\rangle}}$$

=> Vezmeme $g(x) = x_1x^2 + x_2x + x_3 = (x_1, x_2, x_3)_{\langle E\rangle}$ => $g(0) = x_3$ a $g(1) = x_1 + x_2 + x_3$

=> $Q_f(g) = g(0)\,g(1) = x_3(x_1+x_2+x_3) = x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_3$

$$\Rightarrow \underbrace{(Q_{f_s})_{\langle E\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{\langle E\rangle}}_{\uparrow\ \text{matice kvadratické formy} = \text{matice symetr. bilin. formy ke které } Q_f \text{ přísluší}}$$

ad b) Jelikož F není standardní báze, musíme nejprve využít toho, že

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{\langle E\rangle}$ je matice symetrické bilineární formy f_s (vzhledem k standardní bázi) k níž Q_f přísluší

=> $\bar{f}_1 = x^2 + x = (1,1,0)_{\langle E\rangle}$
$\bar{f}_2 = x^2 + 1 = (1,0,1)_{\langle E\rangle}$
$\bar{f}_3 = x + 1 = (0,1,1)_{\langle E\rangle}$

=> $f_s(\bar{f}_1,\bar{f}_1) = (1,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (0,0,1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

$f_s(\bar{f}_1,\bar{f}_2) = (1,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (0,0,1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1$

$f_s(\bar{f}_1,\bar{f}_3) = (1,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = (0,0,1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1$

$f(\bar{f}_2,\bar{f}_2) = (1,0,1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{2}}$

$f_s(\bar{f}_2,\bar{f}_3) = (1,0,1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 2$

$f_s(\bar{f}_3,\bar{f}_3) = (0,1,1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 2$

$$\Rightarrow \left(Q_{f_s}\right)_{\langle F\rangle} = \begin{pmatrix} f_s(\bar f_1,\bar f_1) & f_s(\bar f_1,\bar f_2) & f_s(\bar f_1,\bar f_3) \\ f_s(\bar f_2,\bar f_1) & f_s(\bar f_2,\bar f_2) & f_s(\bar f_2,\bar f_3) \\ f_s(\bar f_3,\bar f_1) & f_s(\bar f_3,\bar f_2) & f_s(\bar f_3,\bar f_3) \end{pmatrix}$$

Protože f_s je symetrická $\Rightarrow f(\bar f_1,\bar f_2) = f(\bar f_2,\bar f_1) = 1$ atd.

$$\Rightarrow \left(Q_{f_s}\right)_{\langle F\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Klasifikace kvadratických forem

Def.: Kvadratická forma Q_f je na vektorovém prostoru V:

a) pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall \bar x \in V - \{\bar o\}$: $Q_f(\bar x) > 0$

b) pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in V$: $Q_f(\bar x) \geq 0$

c) negativně definitní $\Leftrightarrow \forall \bar x \in V - \{\bar o\}$: $Q_f(\bar x) < 0$

d) negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in V$: $Q_f(\bar x) \leq 0$

e) indefinitní $\Leftrightarrow \exists \bar u, \bar v \in V$: $Q_f(\bar u) < 0$ a $Q_f(\bar v) > 0$

Př: Určete typ kvadratické formy $Q_f(\bar x) = x_1^2 + 4x_2^2$

$\Rightarrow$ Evidentně $\forall \underset{\bar x \neq \bar o}{\bar x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2}$ platí : $Q_f(\bar x) = x_1^2 + 4x_2^2 > 0$ $\Rightarrow$ je pozitivně definitní

Př: Určete typ kvadratické formy $Q_f(\bar x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

Zde už situace není tak jednoduchá jako v předchozím případě. Musíme rozhodnout na základě vlastností matice $(Q_f)_{\langle E\rangle}$.

Postup: 1.) Nejprve určíme matici $(Q_f)_{\langle E\rangle}$

$$(Q_f)_{\langle E\rangle} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2.) Matici budeme upravovat v „dvojkrocích" cílem je, dostat pod diagonálu nuly, ale úpravu, kterou jsme udělali s řádky musíme __hned__ udělat i se sloupci:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\left[\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right]}_{\text{1. dvojkrok.}} \sim \underbrace{\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -18 \end{pmatrix}\right]}_{\text{2. dvojkrok}} \sim$$

1. řádek jsme připočetli k 2. řádku

1. sloupec připočteme k 2. sloupci

3. řádek jsme vynásobili číslem 3

3. sloupec vynásobíme číslem 3

(na konci každého dvojkroku musíme mít symetrickou matici! jinak se někde stala chyba!)

$$\sim \left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -15 \end{pmatrix}\right] \sim \left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\right]$$

přičetli jsme 1. řádek ke 3.

přičetli jsme k 3. sloupci první sloupec

(-3) násobek 2. řádku jsme přičetli ke 3. řádku

(-3) násobek 2. sloupce přičteme ke 3. sloupci

3.) Na konci úprav zbyly na diagonále nějaká čísla, jinak jsou všude nuly. Jestliže

a) všechna čísla na diagonále jsou >0 => pozitivně definitní

b) —— \|\| —— ≥ 0 => pozitivně semidef.

c) —— \|\| —— < 0 => negativně def.

d) —— \|\| —— ≤ 0 => negativně semidef.

e) některá čísla na diag. jsou >0 a některá <0 => indefinitní

=> V našem případě je na diag. -3, -1 a -6 => __Q_f je negativně definitní__

Př: Určete bázi B vzhledem k níž má kvadratická forma Q_f diagonální matici. Určete také typ kvadratické formy.

a) $Q_f(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3$, kde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ matice Q_f vzhledem ke st. bázi S: $(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-2&-3\\0&-3&0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ klasifikace:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-2&-3\\0&-3&0\end{pmatrix} \underset{-r_1\to r_2}{\sim} \left[\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-3&-3\\0&-3&0\end{pmatrix} \underset{-s_1\to s_2}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}\right] \underset{-r_2\to r_3}{\sim} \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-3\\0&0&3\end{pmatrix} \underset{-s_2\to s_3}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right]$$

$\Rightarrow$ Q_f je indefinitní

$$E = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow B = \{(1,0,0); (-1,1,0); (1,-1,1)\}$$

Zk: $\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-2&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&-3&-3\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ ✓

b) $Q_f(\bar{x}) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$

$$\Rightarrow (Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix}2&1&0\\1&-3&2\\0&2&1\end{pmatrix} \underset{2\cdot r_2}{\sim} \left[\begin{pmatrix}2&1&0\\2&-6&4\\0&2&1\end{pmatrix} \underset{2\cdot s_2}{\sim} \begin{pmatrix}2&2&0\\2&-12&4\\0&4&1\end{pmatrix}\right] \underset{-r_1\to r_2}{\sim} \left[\begin{pmatrix}2&2&0\\0&-14&4\\0&4&1\end{pmatrix} \underset{-s_1\to s_2}{\sim} \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-14&4\\0&4&1\end{pmatrix}\right] \underset{7\cdot r_3}{\sim} \left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-14&4\\0&28&7\end{pmatrix} \underset{7\cdot s_3}{\sim} \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-14&28\\0&28&49\end{pmatrix}\right]$$

$$\underset{2r_2\to r_3}{\sim} \left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-14&28\\0&0&105\end{pmatrix} \underset{2s_2\to s_3}{\sim} \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-14&0\\0&0&105\end{pmatrix}\right]$$

$\Rightarrow$ Q_f je indefinitní

$$E = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&0&7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\-2&4&7\end{pmatrix} \Rightarrow B = \{(1,0,0); (-1,2,0); (-2,4,7)\}$$

Zk: $\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\-2&4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-3&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&2&4\\0&0&7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&-7&4\\0&0&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&2&4\\0&0&7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-14&0\\0&0&105\end{pmatrix}$ ✓

Př.: Určete kanonický tvar kvadratické formy $Q_f(\bar{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

$$(Q_f)_{\langle s\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{-2r_1 \to r_2 \\ -r_1 \to r_3}}{\sim} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{-2s_1 \to s_2 \\ -s_1 \to s_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \underset{-r_2 \to r_3}{\sim} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{-s_2 \to s_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$G: \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_f(\bar{x}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

kde $\bar{x}_{\langle a\rangle} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -r_3 \\ +r_3 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +2r_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q_f(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2}}$$

ZK: $(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + 2(x_1 + 2x_2)x_3 + x_3^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + x_3^2 =$

$= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 =$

$= x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$