Skalární součin

Def.: (Skalární součin): Skalárním součinem na vektorovém prostoru $(V,+,\cdot)$ nad $\mathbb{R}$ nazveme každou symetrickou bilineární formu $f: V\times V \Rightarrow \mathbb{R}$ k níž přísluší pozitivně definitní kvadratická forma Q_f.

Př. 1.) $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, kde $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

matice této bilin. formy: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$ f je symetrická b.f.

matice Q_f je stejná $\Rightarrow$ Q_f je pozitivně def. kv. forma

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f \text{ je skalární součin}}}$

2.) $f(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, kde $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

matice f i Q_f : $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}1.)\ f \text{ je symetrická b.f.}\\ 2.)\ Q_f \text{ je pozit. def.}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ je skal. součin.}}}$

3.) $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$, $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

matice f : $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$ je symetrická $\Rightarrow$ je stejná jako matice Q_f

ověříme, že Q_f je pozitivně definitní:

$$\underset{-r_1\to r_2}{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}} \sim \left[\underset{-s_1\to s_2}{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}} \sim \underset{2r_2\to r_3}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}}\right] \sim \left[\underset{2s_2\to s_3}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow Q_f \text{ je pozit. def.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\underline{f \text{ je skal. součin}}}$

Poznámka: Existuje nekonečně mnoho skalárních součinů. Ten ze 1.) znáte ze SŠ. Zapisovalo se:

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Dohoda: Pokud nebude řečeno jinak, pod pojmem skalární součin na $\mathbb{R}^3$ budeme mít na mysli ten ze 1.).

Poznámka: Kolmost vektorů je možné zavést pomocí skalárního součinu. Řekněme, že $f: V \times V \to \mathbb{R}$ je skalární součin. Obvykle zapisujeme:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Vektory $\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu f právě když:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$$

Př: a) Ověřte, zda jsou vektory $\bar{x} = (1,0,1)$ a $\bar{y} = (2,1,-1)$ kolmé vzhledem ke skal. součinu: $f(\bar{x}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

$$(\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{0}, \underset{x_3}{1}) \cdot (\underset{y_1}{2}, \underset{y_2}{1}, \underset{y_3}{-1}) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow$$ nejsou kolmé vzhledem k f!!!

b) Ověřte, zda jsou vektory $\bar{x} = (1,0,1)$ a $\bar{y} = (2,1,-1)$ kolmé vzhledem ke skal. součinu: $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3$.

$$(\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{0}, \underset{x_3}{1}) \cdot (\underset{y_1}{2}, \underset{y_2}{1}, \underset{y_3}{-1}) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow$$ jsou kolmé vzhledem k tomuto f!!!

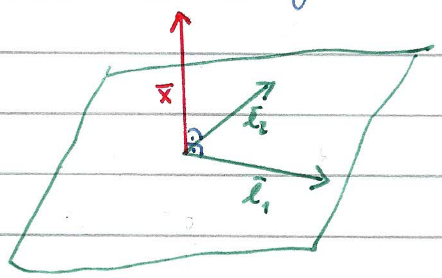
$\Rightarrow$ Vidíme, že vzhledem k jednomu skalárnímu součinu mohou být dané vektory kolmé a vzhledem k jinému skalárnímu součinu kolmé být nemusí.

Ale mohou! Například $\bar{x} = (1,-1,0)$ a $\bar{y} = (1,1,3)$ by v a) i b) vyšly kolmé!

Př. Určete všechny vektory $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektory $\bar{e}_1 = (1,3,1)$ a $\bar{e}_2 = (2,1,3)$.

Hledáme vektory $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ splňující:

$$\bar{x} \cdot (1,3,1) = 0$$
$$\bar{x} \cdot (2,1,3) = 0$$



$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (1,3,1) = 0$$
$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (2,1,3) = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

Vyřešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 + 3t + 5t = 0 \\ \Rightarrow -5x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x_1 = -8t$

/ zvolíme parametr $x_2 = t$

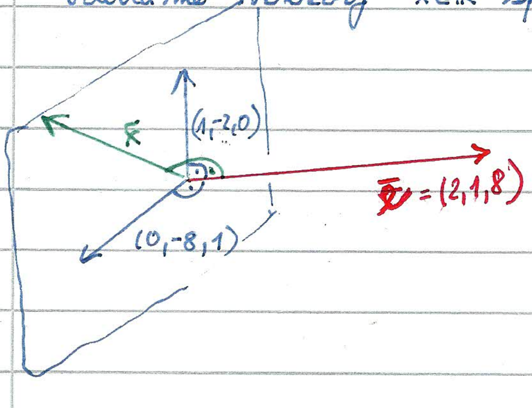
$-5t + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5t$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\bar{x} = (-8t, t, 5t) = t(-8,1,5);\ t \in \mathbb{R}}}$$

Př. Určete všechny vektory $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektor $\bar{e} = (2,1,8)$.

Hledáme vektory $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ splňující:

$$\bar{x} \cdot (2,1,8) = 0$$



$$(x_1, x_2, x_3)(2,1,8) = 0$$

$$\underbrace{2x_1 + x_2 + 8x_3 = 0}$$

soustava 1 rovnice o 3 neznámých $\Rightarrow$ zvolíme 2 parametry, např. $x_3 = t$, $x_1 = s$

$$\Rightarrow 2s + x_2 + 8t = 0$$
$$x_2 = -2s - 8t$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\bar{x} = (s, -2s-8t, t) = s(1,-2,0) + t(0,-8,1);\ s,t \in \mathbb{R}}}$$

Norma vektoru

Def. (Norma vektoru): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $n: V \to \mathbb{R}^+$ (značíme $n(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$) nazveme normou na vektorovém prostoru $(V,+,\cdot)$, právě když $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1.) $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

2.) $\|\alpha \cdot \bar{u}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{u}\|$

3.) $\|\bar{u}\| = 0 \iff \bar{u} = \bar{o}$ ... nulový vektor

Poznámka: Na daném vektorovém prostoru můžeme vytvořit různé normy například na $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$:

a) $n: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$, kde $n((x_1,x_2,x_3)) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$

je normou na $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ - splňuje podmínky z def.:

1.) $\|(u_1,u_2,u_3) + (v_1,v_2,v_3)\| = \|(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)\| =$

$= |u_1+v_1| + |u_2+v_2| + |u_3+v_3| \leq |u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2| +$

$+ |u_3| + |v_3| = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

2.) $\|\alpha(u_1,u_2,u_3)\| = \|(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)\| =$

$= |\alpha u_1| + |\alpha u_2| + |\alpha u_3| = |\alpha|\,(|u_1| + |u_2| + |u_3|) = \alpha \|\bar{u}\|$

3.) $\|(u_1,u_2,u_3)\| = |u_1| + |u_2| + |u_3| = 0 \iff u_1 = u_2 = u_3 = 0 \iff \bar{u} = \bar{o}$

b) Euklidovská norma: Jestliže $f: V \times V \to \mathbb{R}$ je skalární součin, pak zobrazení dané předpisem:

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{f(\bar{u},\bar{u})} = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u}}$$

je normou na $(V,+,\cdot)$

Př: $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$, kde $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3)$; $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3)$, je skal. součin na $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$\|(1,1,1)\| = \sqrt{\underbrace{(1,1,1)}_{x_1\,x_2\,x_3} \cdot \underbrace{(1,1,1)}_{y_1\,y_2\,y_3}} = \sqrt{1+2+1} = \sqrt{4} = 2$$

Záleží na tom, který skalární součin zvolíme! Při „obvyklém"

$f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ by $\|(1,1,1)\| = \sqrt{(1,1,1)(1,1,1)} = \sqrt{3}$