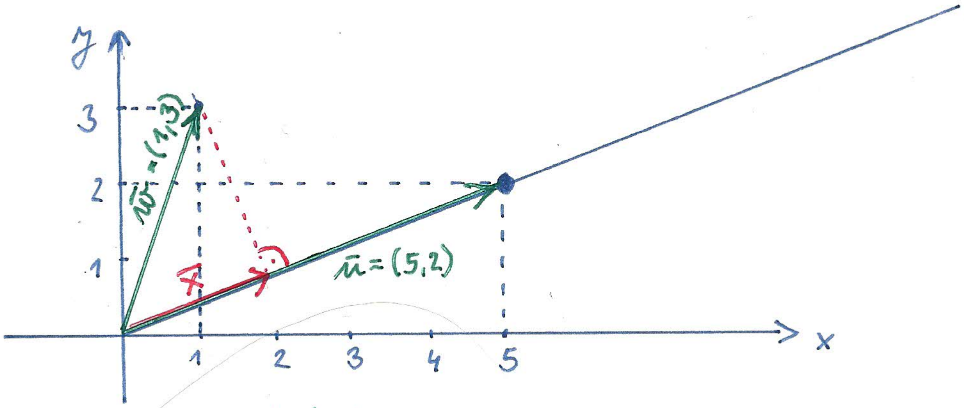
Př. Určete ortogonální projekci vektoru $\bar{w} = (1,3)$ do směru $\bar{u} = (5,2)$.



vektor kolmý na $\bar{u}$

$$\bar{w} = \bar{x} + \bar{w}_\perp$$

vektor rovnoběžný s $\bar{u}$

$\bar{x} = \bar{w} - \bar{w}_\perp$ / víme, že $\boxed{\bar{x} = k\cdot\bar{u}}$ $\Rightarrow$

$k\cdot\bar{u} = \bar{w} - \bar{w}_\perp$ / $\cdot\,\bar{u}$ - víme, že $\bar{u}\,\bar{w}_\perp = 0$

$$k\cdot\bar{u}\cdot\bar{u} = \bar{w}\cdot\bar{u} - \underbrace{\bar{w}_\perp\bar{u}}_{=0}$$

$\boxed{k\cdot\bar{u}\cdot\bar{u} = \bar{w}\cdot\bar{u}}$ = Jedna rovnice o neznámé k - dosadíme za $\bar{u}$ a $\bar{w}$, určíme k a to pak dosadíme do $\bar{x} = k\cdot\bar{u}$:

$$k\cdot(5,2)(5,2) = (1,3)(5,2)$$

$$k\cdot 29 = 11$$

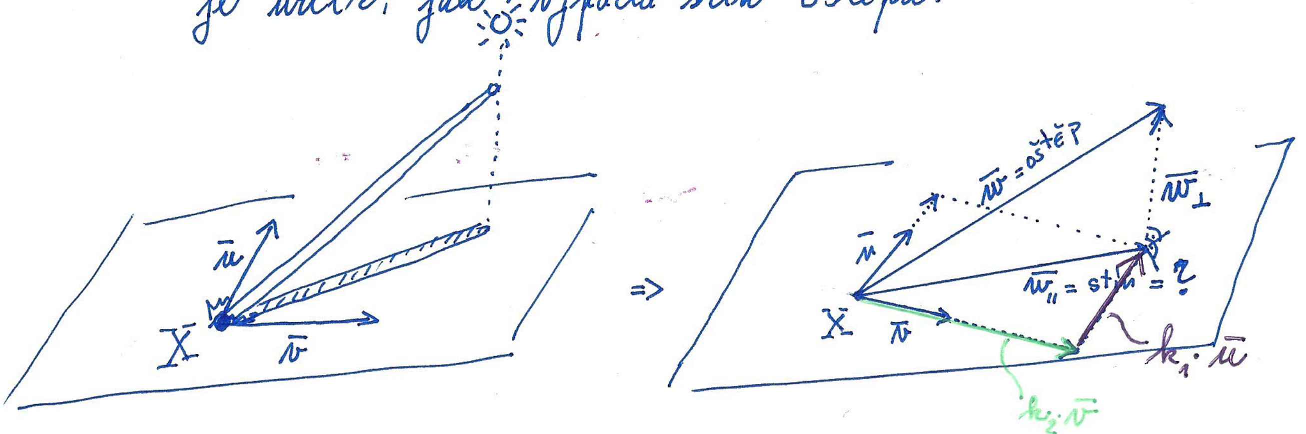
$$k = \frac{11}{29} \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{11}{29}(5,2)$$

Ortogonální projekce vektoru do roviny

Motivační příklad: Představme si, že část povrchu Země je částí roviny, která je dána bodem X a vektory $\bar{u}$ a $\bar{v}$.

Slunce svítí kolmo na tuto rovinu. Přiletí oštěp a zabodne se do bodu X. Naším cílem je určit, jak vypadá stín oštěpu.



Řešení: Vektor $\bar{w}$ (oštěp) můžeme rozložit na složku kolmou k rovině - označme ji $\bar{w}_\perp$ (platí: $\bar{w}_\perp$ je vektor kolmý na $\bar{u}$ i $\bar{v}$) a na složku rovnoběžnou s rovinou - označme ji $\bar{w}_{\parallel}$ (platí $\bar{w}_{\parallel} = k_1 \cdot \bar{u} + k_2 \cdot \bar{v}$).

To jest:

$$\bar{w} = \bar{w}_\perp + \bar{w}_{\parallel} \qquad (1)$$

Naším cílem je určit $\bar{w}_{\parallel}$. Z rovnice (1) plyne, že

$$\bar{w}_{\parallel} = \bar{w} - \bar{w}_\perp \qquad (2)$$

Ale také víme, že $\bar{w}_{\parallel} = k_1 \cdot \bar{u} + k_2 \cdot \bar{v}$. Z (2) proto plyne, že

$$\bar{w} - \bar{w}_\perp = k_1 \cdot \bar{u} + k_2 \cdot \bar{v} \qquad (3)$$

Levou i pravou stranu rovnice (3) vynásobíme vektorem $\bar{u}$, potom levou i pravou stranu rovnice (3) vynásobíme (skalárně) vektorem $\bar{v}$. Obdržíme tak dvě rovnice:

$$\bar{u}\cdot(\bar{w}-\bar{w}_\perp) = \bar{u}\,(k_1\bar{u}+k_2\bar{v})$$ = (3) vynásobená vektorem $\bar{u}$

$$\bar{v}\cdot(\bar{w}-\bar{w}_\perp) = \bar{v}\,(k_1\bar{u}+k_2\cdot\bar{v})$$ = (3) vynásobená vektorem $\bar{v}$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u}\cdot\bar{w} - \bar{u}\cdot\bar{w}_\perp = k_1\,\bar{u}\cdot\bar{u} + k_2\,\bar{u}\cdot\bar{v}$$ / $\bar{u}$ a $\bar{w}_\perp$ jsou na sebe kolmé $\Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{w}_\perp = 0$

$$\bar{v}\cdot\bar{w} - \bar{v}\cdot\bar{w}_\perp = k_1\,\bar{v}\bar{u} + k_2\,\bar{v}\cdot\bar{v}$$ / $\bar{v}$ a $\bar{w}_\perp$ jsou na sebe kolmé $\Rightarrow \bar{v}\cdot\bar{w}_\perp = 0$

$$\Rightarrow \quad (*) \quad \boxed{\begin{aligned} \bar{u}\cdot\bar{w} &= k_1\,\bar{u}\cdot\bar{u} + k_2\,\bar{u}\cdot\bar{v} \\ \bar{v}\cdot\bar{w} &= k_1\,\bar{v}\cdot\bar{u} + k_2\,\bar{v}\cdot\bar{v} \end{aligned}}$$

$\leftarrow$ Vektory $\bar{u}$, $\bar{v}$ i $\bar{w}$ známe, jde tedy o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých k_1 a k_2. Když je určíme, pak stačí dosadit do:

$$\bar{w}_{\parallel} = k_1\,\bar{u} + k_2\cdot\bar{v}$$

Př: Určete ortogonální projekci vektoru $\bar{w} = (1,2,1)$ do roviny zadané nějakým bodem a vektory $\bar{u} = (-1,2,1)$ a $\bar{v} = (+1,0,-1)$.

Řešení: Nejdříve dosadíme do soustavy rovnic $(*)$:

$$\begin{aligned} (-1,2,1)\cdot(1,2,1) &= k_1\,(-1,2,1)\cdot(-1,2,1) + k_2\,(-1,2,1)\cdot(1,0,-1) \\ (1,0,-1)\cdot(1,2,1) &= k_1\,(1,0,-1)\cdot(-1,2,1) + k_2\,(1,0,-1)\cdot(1,0,-1) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 4 &= 6k_1 - 2k_2 \\ 0 &= -2k_1 + 2k_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \updownarrow \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} :2 \\ +3r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 = 1 \\ \Rightarrow k_2 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{w}_{\parallel} = k_1\bar{u} + k_2\cdot\bar{v} = 1\cdot(-1,2,1) + 1\cdot(1,0,-1) = \underline{\underline{(0,2,0)}}$$

Př: Určete ortogonální projekci vektoru $\overline{w}$ do roviny zadané nějakým bodem a vektory $\overline{u}$ a $\overline{v}$.

a) $\overline{w} = (1,2,3)$, $\overline{u} = (-1,2,1)$, $\overline{v} = (1,0,1)$

$$\Rightarrow \quad (-1,2,1)(1,2,3) = k_1\,(-1,2,1)(-1,2,1) + k_2\,(-1,2,1)(1,0,1)$$
$$(1,0,1)(1,2,3) = k_1\,(1,0,1)(-1,2,1) + k_2\,(1,0,1)(1,0,1)$$

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 6k_1 + 0k_2 \\ 4 &= 0k_1 + 2k_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} :6 \\ :2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 = 1 \\ \Rightarrow k_2 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{w}_{\parallel} = k_1 \overline{u} + k_2 \overline{v} = 1\cdot(-1,2,1) + 2(1,0,1) = \underline{\underline{(1,2,3)}}$$

(Všimněme si, že vyšlo $\overline{w}_{\parallel} = (1,2,3) = \overline{w}$, znamená to, že $\overline{w}$ leží v rovině)

b) $\overline{w} = (1,1,2)$, $\overline{u} = (1,-1,0)$, $\overline{v} = (3,1,2)$

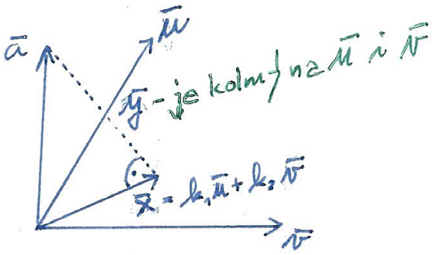
$$\Rightarrow \quad (1,-1,0)(1,1,2) = k_1(1,-1,0)(1,-1,0) + k_2\,(1,-1,0)(3,1,2)$$
$$(3,1,2)(1,1,2) = k_1(3,1,2)(1,-1,0) + k_2\,(3,1,2)(3,1,2)$$

$$0 = 2k_1 + 2k_2$$
$$8 = 2k_1 + 14k_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 14 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} :2 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow k_2 = \frac{8}{12} = \underline{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad k_1 + \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \underline{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{w}_{\parallel} = k_1 \overline{u} + k_2 \overline{w} = -\frac{2}{3}(1,-1,0) + \frac{2}{3}(3,1,2) = \underline{\underline{\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)}}$$

Př: Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\bar{a}$ do lineárního obalu vektorů $\bar{u}$ a $\bar{v}$



$$\bar{a}\cdot\bar{u} = (\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{u} = \bar{x}\bar{u} + \overbrace{\bar{y}\bar{u}}^{0} = \bar{x}\bar{u} = \overbrace{(k_1\bar{u}+k_2\bar{v})}^{\bar{x}}\cdot\bar{u}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{v} = (\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{v} = \bar{x}\bar{v} + \underbrace{\bar{y}\bar{v}}_{0} = \bar{x}\bar{v} = \underbrace{(k_1\bar{u}+k_2\bar{v})}_{\bar{x}}\cdot\bar{v}$$

1.) $\bar{a} = (1,2,1)$; $\bar{u} = (1,-1,5)$; $\bar{v} = (1,0,1)$

$$(1,2,1)(1,-1,5) = k_1(1,-1,5)(1,-1,5) + k_2(1,0,1)(1,-1,5) \quad = (k_1\bar{u}+k_2\bar{v})\cdot\bar{u}$$
$$(1,2,1)(1,0,1) = k_1(1,-1,5)(1,0,1) + k_2(1,0,1)(1,0,1) \quad = (k_1\bar{u}+k_2\bar{v})\cdot\bar{v}$$

$$4 = 27k_1 + 6k_2$$
$$2 = 6k_1 + 2k_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 27 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{array}\right) :2 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 27 & 6 & 4 \end{array}\right) -9r_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{k_2 = \tfrac{5}{3}} \Rightarrow 3k_1 + \tfrac{5}{3} = 1 \Rightarrow 3k_1 = -\tfrac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{k_1 = -\tfrac{2}{9}}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = k_1\bar{u} + k_2\bar{v} = -\tfrac{2}{9}(1,-1,5) + \tfrac{5}{3}(1,0,1) = -\tfrac{2}{9}(1,-1,5) + \tfrac{15}{9}(1,0,1) = \underline{\underline{\left(\tfrac{13}{9}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{5}{9}\right)}}$$

Zk: $\bar{a}-\bar{x} = (1,2,1) - (\tfrac{13}{9}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{5}{9}) = \tfrac{1}{9}(-4, 16, 4) = \bar{y}$ je vektor kolmý na $(1,-1,5)$ i na $(1,0,1)$.

2.) $a = (1,0,3)$; $\bar{u} = (1,1,0)$; $\bar{v} = (0,1,2)$

$$(1,0,3)(1,1,0) = k_1(1,1,0)(1,1,0) + k_2(0,1,2)(1,1,0)$$
$$(1,0,3)(0,1,2) = k_1(1,1,0)(0,1,2) + k_2(0,1,2)(0,1,2)$$

$$1 = 2k_1 + k_2$$
$$6 = k_1 + 5k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) -2r_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -9 & -11 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{k_2 = \tfrac{11}{9}} \Rightarrow k_1 + \tfrac{55}{9} = 6 \Rightarrow \underline{k_1 = -\tfrac{1}{9}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = -\tfrac{1}{9}(1,1,0) + \tfrac{11}{9}(0,1,2) = \underline{\underline{\tfrac{1}{9}(-1, 10, 22)}}$$

Zk.: $\bar{a}-\bar{x} = (1,0,3) - \tfrac{1}{9}(-1,10,22) = \tfrac{1}{9}(10,-10,5) = \bar{y}$

$(10,-10,5)(1,1,0) = 0$ ✓

$(10,-10,5)(0,1,2) = 0$ ✓