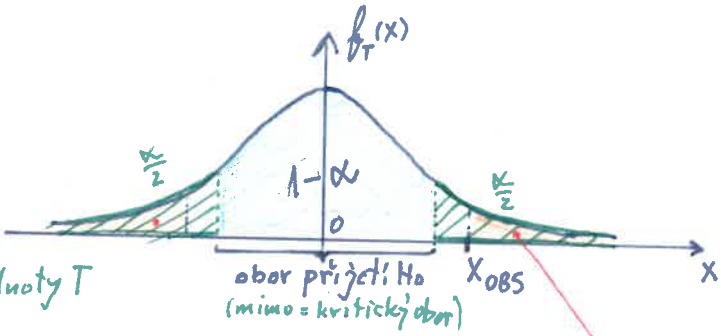
Jednovýběrový t-test : Naměřili jsme hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$ náhodné veličiny $X \to N(\mu, \sigma^2)$.
Využijeme testovou statistiku:

$$T = \frac{\overset{\text{výběrový průměr}}{\bar{X}} - \mu}{\underset{\text{výběrová směrod. odch.}}{S}} \sqrt{n} \longrightarrow t_{n-1} \dots \text{ Studentovo rozd. s } n-1 \text{ stupni volnosti}$$

a) Testujeme hypotézu:

$H_0 : \mu = \mu_0$ ... nějaká konkr. hodnota



Pokud se $\mu = \mu_0 \Rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \to t_{n-1}$ a hodnoty T by měly být „poblíž" nuly. Pokud

$$T_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$$

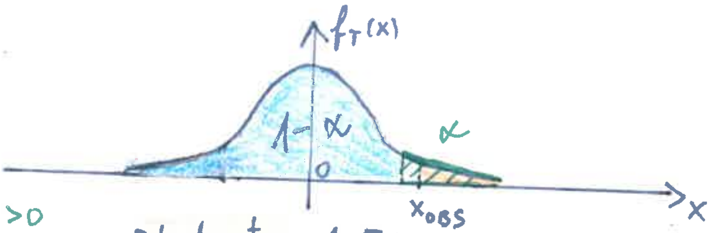
je daleko od 0 ⇒ buď došlo k „málo" pravděpodobnému jevu, nebo H_0 není pravdivá.

p-hodnota $= 2 \cdot \min\{F_T(x_{obs}),\ 1 - F_T(x_{obs})\}$
" součet oranžových ploch

p-hodnota $< \alpha \Rightarrow$ přijímáme $H_A : \mu \neq \mu_0$
(zamítáme H_0)

b) Testujeme hypotézu:

$H_0 : \mu = \mu_0$



Pokud $T_{obs} > 0 \Rightarrow \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} > 0 \Rightarrow \bar{x} - \mu_0 > 0$
$\Rightarrow \bar{x} \doteq \mu > \mu_0$

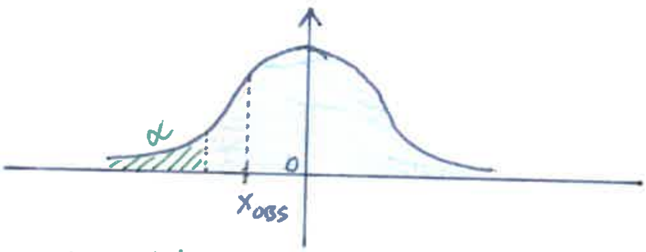
⇒ Pokud T_{obs} je kladné „daleko" od 0 ⇒ data naznačují: $H_A : \mu > \mu_0$

p-hodnota $= 1 - F_T(x_{obs}) < \alpha \Rightarrow$ přijmeme H_A
zamítneme H_0

c) Testujeme hypotézu:

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_A : \mu < \mu_0$



$x_{obs} < 0 \Rightarrow$ data naznačují, že $\mu < \mu_0$, ale ne dost silně (ne statisticky významně na hladině významnosti α), neboť

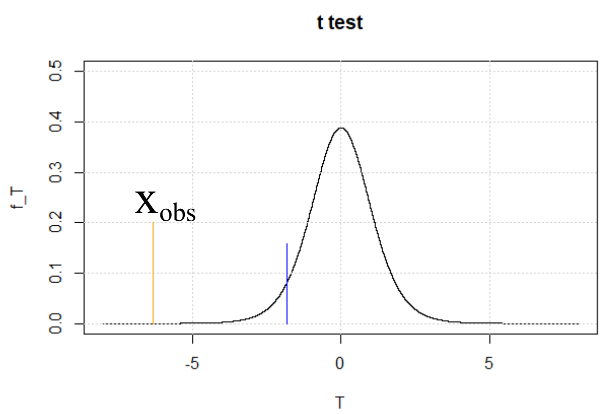
$F_T(x_{obs}) =$ p-hodnota $> \alpha \Rightarrow$ nezamítáme H_0

Předpoklady testu: $X \to N(\mu, \sigma^2)$

Př: Předpokládejme, že jsme měřili velikost tíhového zrychlení na určitém místě Země. Provedli jsme celkem 10 měření, průměrná hodnota vyšla $\bar{x} = 9{,}71\ m.s^{-2}$ a výběrová směrodatná odchylka $s = 0{,}05\ m.s^{-2}$.
Předpokládejme, že data pocházejí z normálního rozdělení (tj. že chyby měření mají normální rozdělení).
Rozhodněte, zda je tato hodnota statisticky významně nižší, než udávaná hodnota $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$ (na stejné zem. šířce).

⇒ Použijeme jednovýběrový t-test
Předpoklady testu: normalita dat – podle zadání splněno.

$H_0: \mu = 9{,}81\ m.s^{-2}$
$H_A: \mu < 9{,}81\ m.s^{-2}$



Pokud platí H_0 ⇒

$$X = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \longrightarrow t_{n-1}$$

Pozorovaná hodnota X:

$$x_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{9{,}71 - 9{,}81}{0{,}05}\sqrt{10} = -2\sqrt{10} \doteq -6{,}32$$

p-hodnota:

$$\text{p-hodnota} = F(x_{obs}) = F(-2\sqrt{10}) \doteq 7 \cdot 10^{-5}$$

Závěr: p-hodnota << 0,05. Proto na hladině významnosti 0,05 zamítáme $H_0: \mu = 9{,}81$. To jest, naměřená hodnota $9{,}71\ m.s^{-2}$ je statisticky významně menší, než udávaná hodnota $9{,}81\ m.s^{-2}$.

Př. Výrobce tvrdí, že jeho motory typu A dosahují v průměru maximálního výkonu 100 kW.

a) Testujte hypotézu, že výrobce říká pravdu. (Naměřené hodnoty maximálních výkonů jsou v souboru „10 cv PAST Jahoda.xlsx" list „motory".)

Označme X ... maximální výkon motoru typu A

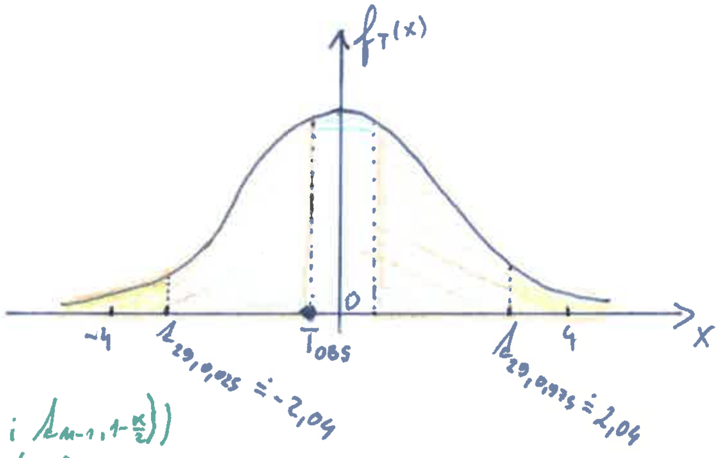
Možné testy:

- t test (preferujeme) → **Předpoklady:** $X \to N(\mu, \sigma^2)$
- Wilcoxonův test (o mediánu $x_{0,5}$) → Výběr ze spoj. symetr. rozdělení, $n > 30$
- Znaménkový test (o mediánu $x_{0,5}$) (má nejmenší sílu – pravděp., že zamítneme H_0, když je H_A pravda) → $n > 10$

Vyřešit odlehlá pozorování (odstranit/ne), ověřit normalitu exploračně (histogram, šikmost, špičatost ∈ ⟨-2,2⟩, qq graf) a testem (shapiro-wilk.)

```
vykony = read_excel("10cvPast Jahoda.xlsx", sheet = "motory")
boxplot(vykony$vykon), hist(-||-), moments::skewnes(-||-), qqnorm(-||-), qqline(-||-)
                                   moments::kurtosis (-||-)
shapiro.test(-||-)
```

Zvolený test: t. test (oboustranný)



1.) Hypotéza (nulová): $H_0: \mu = 100\,kW$

2.) Alternativní hyp.: $H_A: \mu \neq 100\,kW$

3.) Hladina významnosti: ($\alpha = 0{,}05$ – u klas. testu)

4.) Testová statistika: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \to t_{n-1}$

(u klasického testu bychom našli obor přijetí: $(t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\ ;\ t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})$)
(u čistého testu významnosti rozhodneme podle p-value)

5.) Výpočet T_{OBS}: $T_{OBS} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$

$T_{OBS} \doteq -0{,}3956$

$\bar{x} = \text{mean}(-||-) \doteq 99{,}18\bar{3}$
$\mu_0 = 100$
$n = \text{lenght}(-||-) = 30$
$s = \text{sd}(-||-) \doteq 11{,}309$

6.) Výpočet p-value: (p-hodnota $= 2 \cdot F_T(T_{OBS}) = 0{,}695$) (stačí na 3 des. místa)
– u čistého testu významnosti

⇒ Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ nezamítáme hypotézu, že $\mu = 100\,kW$.

b) Pomocí čistého testu významnosti ověřte, zda je střední hodnota maximálních výkonů motorů typu A statisticky významně menší než 105 kW.

V a) jsme ověřili normalitu dat => můžeme použít t-test.

Čistý test významnosti:

1.) Nulová hypotéza: $H_0: \mu = 105 = \mu_0$

2.) Alternativní hypotéza: $H_A: \mu < 105$

3.) Testová statistika: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \longrightarrow t_{n-1}$

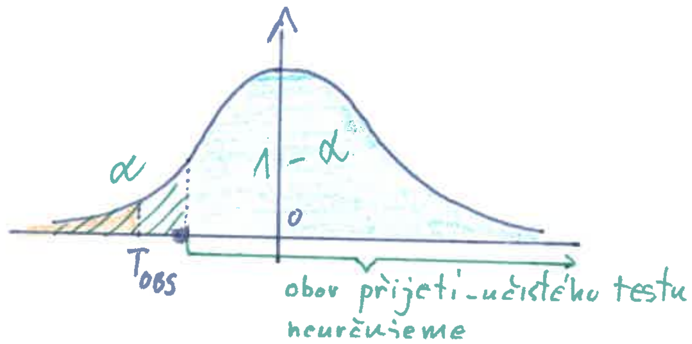
4.) Výpočet pozorované hodnoty T:

$\bar{x} \doteq 99{,}183$, $\mu_0 = 105$, $s \doteq 11{,}309$, $n = 30$, =>

$$T_{OBS} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \doteq -2{,}8173$$

5.) Výpočet p-hodnoty:

$$\text{p-hodnota} = \underset{\underset{pt(\underset{T_{OBS}}{-2{,}8173},\ \underset{n-1}{29})}{\shortparallel}}{F_T(T_{OBS})} \doteq 0{,}004$$



6.) Rozhodnutí:

Protože p-hodnota = 0,004 < 0,05, zamítáme nulovou hypotézu ve prospěch alternativy, že skutečná střední hodnota maximálních výkonů je menší než 105 kW.

(H_0 zamítáme na libovolné hladině významnosti větší než 0,004.)

Př.: Máme výběr 216 pacientů a měřili jsme obsah albuminu v jejich krvi. Ověřte, zda se střední hodnota množství albuminu statisticky významně liší od hodnoty 35 g/l.

Test: Jednovýběrový t-test

Data: Neobsahují odlehlá pozorování → OK

Předpoklady testu:
- šikmost $\doteq -0{,}33 \in \langle -2, 2 \rangle \Rightarrow$ OK
- st. špičatost $\doteq -0{,}43 \in \langle -2, 2 \rangle \Rightarrow$ OK (standardizovaná)
- q-q graf → OK
- histogram → OK
- Shapiro-Wilkův test normality: p-hodnota $\doteq 0{,}24 \Rightarrow$ nezamítáme normalitu

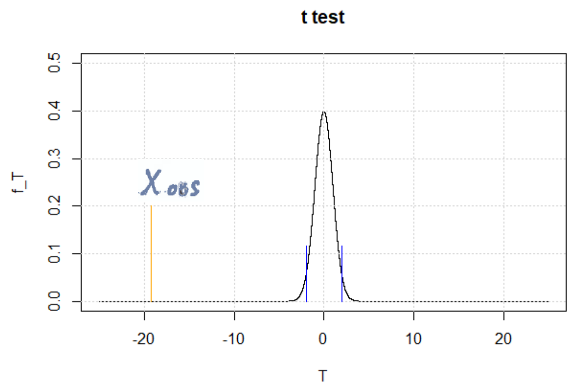
$\Rightarrow$ OK

$H_0: \mu = 35$

$H_A: \mu \neq 35$

$$X = \frac{\overline{X} - \mu}{s}\sqrt{n} \longrightarrow t_{n-1}$$

$$X_{obs} \doteq \frac{34{,}487 - 35}{0{,}394}\sqrt{216} \doteq -19{,}249$$



$$\text{p-hodnota} = 2 \cdot F(X_{obs}) \doteq 0 \ll 0{,}05$$

$\Rightarrow$ Zamítáme nulovou hypotézu, že střední hodnota je rovna 35 g/l statisticky významně se od této hodnoty liší.

Př.: V souboru "10cv…" list "preziti" jsou doby přežití 100 pacientů s diagnózou C léčených novým lékem. U pacientů bez podávání nového léku je průměrná doba přežití 22,2 měsíce. Lze na základě dat tvrdit, že nový lék statisticky významně prodlužuje dobu přežití?

Možné testy: t-test NE => Wilcoxnův NE => Znaménkový

zamítáme normalitu dat — shapiro.test(...)

zamítáme symetrii — lawstat::symmetry.test(...)

=> $H_0: X_{0,5} = 22,5$

$H_A: X_{0,5} > 22,5$

=> BSDA::SIGN.test(preziti$hodnoty.bez, md=22.2, alternative="greater", conf.level=0.95)

p-value ≐ 0.93 => nezamítáme H_0, přežití není významně větší

Co druhá alternativa?! naměřené $X_{0,5} = 20$ = median(hodn..., na.rm=TRUE)

výsledek NA

$H_0: X_{0,5} = 22,5$

$H_A: X_{0,5} < 22,5$

=> BSDA::SIGN.test(preziti$hodnoty.bez, md=22.2, alternative="less", conf.level=0.95)

p-value ≐ 0,08 > 0,05 => nezamítáme H_0 ani ve prospěch alternativy, že přežití je kratší

Jednovýběrový F-test:

(o směrodatné odchylce)

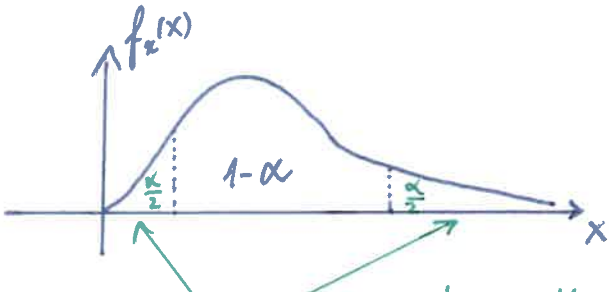
$X \to N(\mu, \sigma^2)$ a máme naměřeny hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$. Z nich určíme výběrovou směrodatnou odchylku s. Testujeme, zda teoretická směrodatná odchylka σ je rovna nějakému číslu σ_0. Využijeme testovou statistiku:

a) $H_0: \sigma = \sigma_0$

$H_A: \sigma \neq \sigma_0$

$$\chi = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma_0^2} \longrightarrow \chi^2_{n-1}$$

$$\chi_{OBS} = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

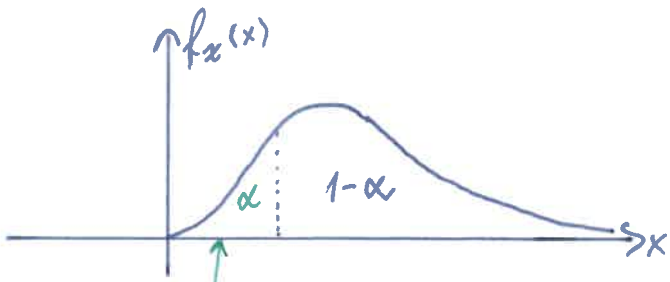


χ_{OBS} => zamítneme H_0.

($s \doteq \sigma$ je hodně jiné než σ_0 => $\frac{s^2}{\sigma_0^2}$ vychází buď hodně malé, nebo velké)

b) $H_0: \sigma = \sigma_0$

$H_A: \sigma < \sigma_0$

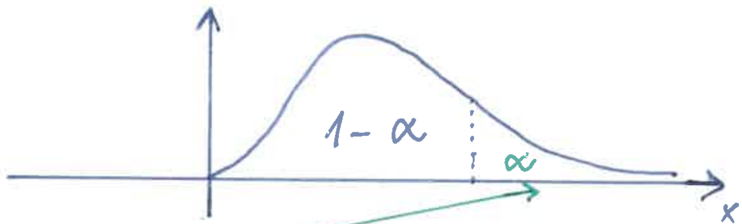


χ_{OBS} => zamítneme H_0

(hodnoty χ jsou „malé" když $s < \sigma_0$)

c) $H_0: \sigma = \sigma_0$

$H_A: \sigma > \sigma_0$



χ_{OBS} => zamítneme H_0

$\boxed{\text{Předpoklady testu: } X \to N(\mu, \sigma^2)}$

Př. Naměřili jsme hodnoty maximálních výkonů motorů typu A. Směrodatná odchylka výkonů jednotlivých motorů by neměla překročit 5 kW.

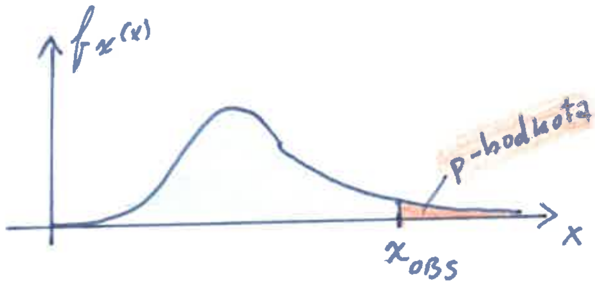
Měřením výkonů 30 motorů jsme zjistili výběrovou směrodatnou odchylku 11,31 kW. Testujte hypotézu, že směrodatná odchylka je rovna 5 kW proti alternativě, že je větší. Naměřená data pocházejí z normálního rozdělení.

$H_0: \sigma = 5\,kW$

$H_A: \sigma > 5\,kW$

$$x = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi^2_{n-1}$$

$$x_{OBS} = \frac{29 \cdot 11{,}31^2}{5^2} \doteq 148{,}35$$



$$\text{p-hodnota} = 1 - F(x_{OBS}) \doteq 0 \ll 0{,}05 \Rightarrow$$

Směrodatná odchylka je na hladině významnosti 0,05 statisticky významně větší než 5 kW (p-hodnota $\ll 0{,}05$)

(nepsat do odpovědi, že p-hodnota =0, tak to jistě není!)

Př.: Výrobce udává, že směrodatná odchylka průměrů pístových kroužků je 0,05 mm. Pro ověření byly naměřeny průměry osmdesáti kroužků (soubor cv10... list krouzky). Ověřte, zda naměřená data svědčí o statisticky významně menší skutečné směrodatné odchylce, než je deklarovaná.

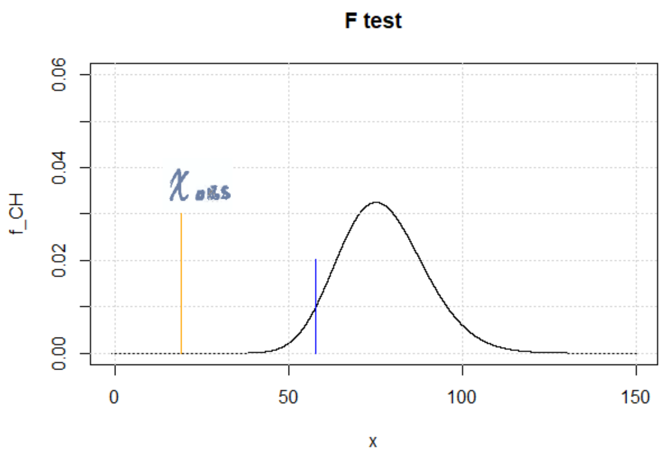
Jednovýběrový F-test

V datech jsou odlehlá pozorování – rozhodli jsme se odstranit je. $\Rightarrow n = 80-2 = 78$

Předpoklady testu: šikmost $\doteq 0{,}05$
st. špičatost $\doteq 0{,}40$
q-q plot
histogram
Shapiro Wilk test

Data pochází z normálního rozdělení $\Rightarrow$ OK

$H_0: \sigma = 0{,}05$ mm
$H_A: \sigma < 0{,}05$ mm



$$\chi = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi^2_{n-1}$$

$$\chi_{OBS} \doteq \frac{77 \cdot 0{,}0245^2}{0{,}05^2} \doteq 19{,}01$$

$$\text{p-hodnota} = F(\chi_{OBS}) \doteq 1{,}35 \cdot 10^{-12}$$

$\text{pchisq}(\underset{\chi_{OBS}}{\overset{\shortparallel}{19{,}01}}, \underset{n-1}{\overset{\shortparallel}{77}})$

Závěr: Protože p-hodnota $<< 0{,}05$, zamítáme na hladině významnosti nulovou hypotézu. Střední hodnota rozptylu průměrů kroužků je statisticky významně menší než 0,05 mm.

Test hypotézy o relativní četnosti: Nechť $X_i = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \text{i-tý objekt má vlastnost A} \\ 1 \Leftrightarrow \text{i-tý objekt nemá vlastn. A} \end{cases}$

(Parametru binom. rozdělení π)

Označme $P(X_i = 1) = \pi$ ... pravděp., že i-tý objekt má vlastnost A.

$\Rightarrow EX_i = \mu = \pi$, $\sqrt{DX_i} = \sigma = \sqrt{\pi(1-\pi)}$

Provedeme n měření a obdržíme hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$\Rightarrow$ Relativní četnost objektů s vlastností A je:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} \quad .$$

Podle CLV:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} \sqrt{n} \longrightarrow N(0,1)$$

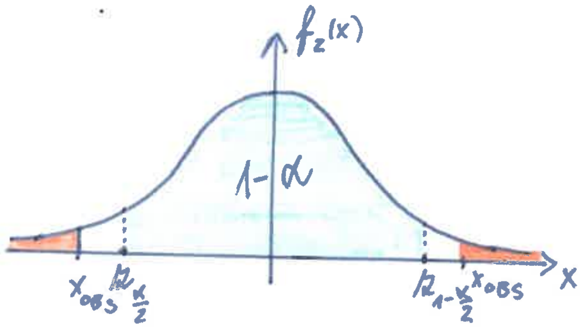
a) Testujeme hypotézu: $H_0: \pi = \pi_0$

$H_A: \pi \neq \pi_0$

$$Z = \frac{P - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} \sqrt{n} \longrightarrow N(0,1)$$

$$Z_{OBS} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}} \sqrt{n}$$

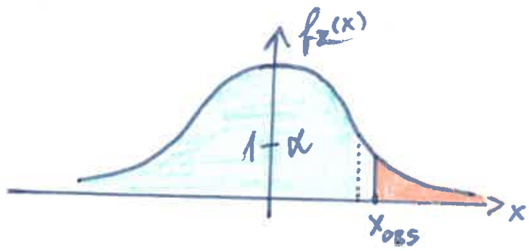
(p je naměřená rel. četnost)



$$\text{p-hodnota} = 2 \cdot \min\{F(x_{OBS}),\ 1 - F(x_{OBS})\} \begin{cases} < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{Zamítáme } H_0 \\ \geq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{Nezamítáme } H_0 \end{cases}$$

b) Testujeme hypotézu: $H_0: \pi = \pi_0$

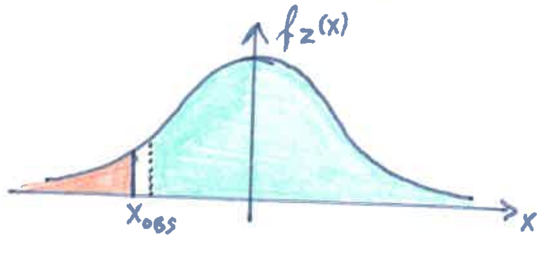
$H_A: \pi > \pi_0$



$$\text{p-hodnota} = 1 - F(x_{OBS})$$

c) Testujeme hypotézu: $H_0: \pi = \pi_0$

$H_A: \pi < \pi_0$



$$\text{p-hodnota} = F(x_{OBS})$$

Předpoklady testu: $n > 30$, $n > \frac{9}{p(1-p)}$

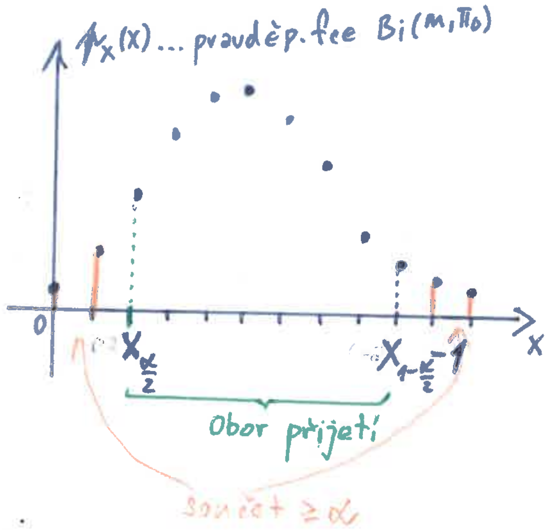
Test (exaktní) o relativní četnosti (Parametru binom. rozdělení π): Provedeme n měření (pokusů) a zkoumáme, kolik objektů má vlastnost A (úspěch) =>

X ... počet úspěchů při n pokusech $\rightarrow Bi(n, \pi)$
(n. v. s binomickým rozdělením pravděpodobnosti)

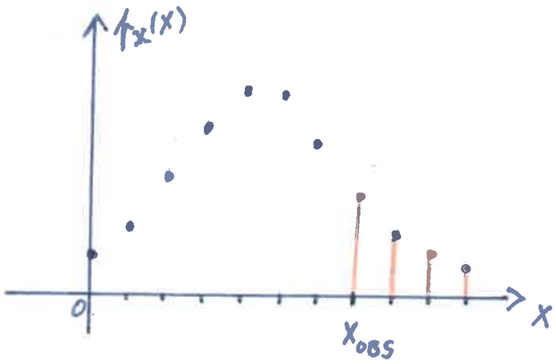
a) Testujeme hypotézu: $H_0: \pi = \pi_0$
$H_A: \pi \neq \pi_0$

$X \rightarrow Bi(n, \pi_0)$ ...pokud platí H_0

x_{OBS} ... počet objektů s vlast. A mezi n měřenými

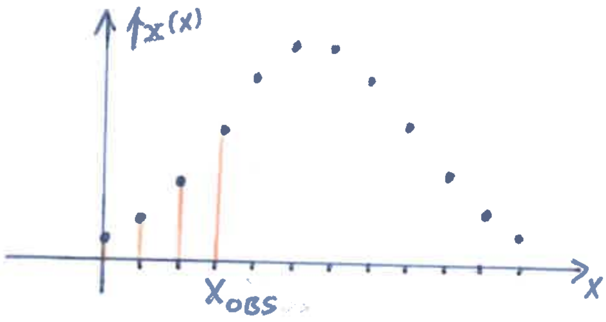


b) Testujeme hypotézu: $H_0: \pi = \pi_0$
$H_A: \pi > \pi_0$



$$p\text{-value} = P(X \geq x_{OBS}) = 1 - P(X < x_{OBS}) = 1 - P(X \leq x_{OBS} - 1)$$

c) Testujeme hypotézu: $H_0: \pi = \pi_0$
$H_A: \pi < \pi_0$



$$p\text{-value} = P(X \leq x_{OBS})$$

Př.: Matematický model udává, že pravděpodobnost pooperačních komplikací je 30%. Testujte hypotézu, že model je správný, víte-li, že z 50 pacientů mělo 18 pooperační komplikace.

a) Aproximace pomocí CLV:

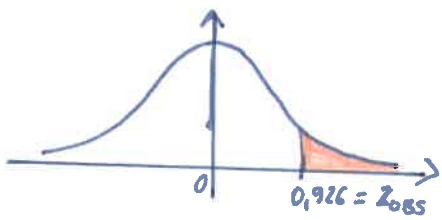
Předpoklady: $n = 50 > 30$; $n = 50 > \dfrac{9}{\frac{18}{50}\left(1-\frac{18}{50}\right)} = \dfrac{9}{\frac{18}{50}\cdot\frac{32}{50}} = \dfrac{50\cdot 50}{2\cdot 32} = \dfrac{2500}{64} \doteq 39{,}06$

$H_0 : \pi = 0{,}3$

$H_A : \pi > 0{,}3$ $\left(p = \frac{18}{50} = \frac{36}{100} = 0{,}36 \ \ldots \right.$ data naznačují, že $\left.\pi > 0{,}3 \right)$

$$Z = \frac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\sqrt{n} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} N(0,1)$$

$$Z_{OBS} = \frac{p-\pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n} = \frac{0{,}36-0{,}3}{\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}7}}\sqrt{50} \doteq 0{,}926$$



$$\text{p-value} = 1 - F(Z_{OBS}) \doteq 0{,}177$$

=> Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme nulovou hypotézu, že pooperační komplikace se vyskytují s pravděpodobností 0,3.

b) Pomocí binomického rozdělení:

$H_0 : \pi = 0{,}3$

$H_A : \pi > 0{,}3$

$X \longrightarrow Bi(n;\pi) = Bi(50;\, 0{,}3)$

$X_{OBS} = 18$

$\text{p-hodnota} = P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) \doteq 0{,}218$

1-pbinom(17, 50, 0.3)

V R-ku: binom.test(18, 50, 0,3, alternative = "greater")

=> Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme nulovou hypotézu, že pooperační komplikace se vyskytují s pravděpodobností 0,3.