# KOMBINATORIKA

**Permutace:** Seřazujeme n prvků do „fronty."

Př.: Kolika způsoby je možné seřadit písmena A, B a C.

=> Máme tři „chlívky", kam se snažíme dát A B C : □ □ □
jak to může dopadnout:

1\. pozice, 2. pozice, 3. pozice

| 1. pozice: | 2. pozice: | 3. pozice: | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | => ABC |
| | C | B | => ACB |
| B | A | C | => BAC |
| | C | A | => BCA |
| C | B | A | => CBA |
| | A | B | CAB |

celkem 6 možností

=> 1. pozice □ 3 možnosti, pro každou z nich 2. pozice □ 2 možnosti, pro každou z nici 3. pozice □ 1 možnost => $P(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

permutace 3 prvků

factorial(3)

Př. Kolika způsoby můžeme seřadit 5 různých lidí do fronty?

□ □ □ □ □

5 možností pro 1. pozici, 4 možnosti pro druhou pozici; 3 možnosti pro třetí pozici, 2 možnosti pro čtvrtou pozici a na poslední pozici vždy zbývá už jen jeden člověk =>

$$P(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

factorial(5)

Př.: Kolik různých čtyřmístných číslic můžeme sestavit z číslic 1, 5, 2 a 8?

Snažíme se 4 různé číslice umístit do 4 „chlívků," záleží na jejich pořadí (je to totéž jako umístit 4 lidi do fronty).

$\Rightarrow \quad P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{24}}$ factorial(4)

Př.: Je třeba odstranit součástku, která drží na 10 šroubech. Kolika způsoby můžeme zvolit pořadí vyšroubování těchto šroubů?

Šrouby očíslujeme 1 až 10 a zjišťujeme, kolika způsoby je můžeme seřadit do fronty na vyšroubování. $\Rightarrow$

$P(10) = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{3\,628\,800}}$ factorial(10)

Permutace bez opakování: Zaplňujeme $n$ pozic $n$ různými prvky (záleží na jejich pořadí).

Počet různých permutací $n$ prvků $= P(n) = n!$

## Permutace s opakováním: Seřazujeme n prvků do fronty, ale některé se opakují.

**Př:** Závodu se zúčastnili Petr, Pavel a Přemysl z Prahy a Ondřej z Ostravy.

a) Kolika různými způsoby mohou doběhnout do cíle?

$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{24}}$$

| 1. Petr: | 1. Pavel: | 1. Přemysl | 1. Ondřej |
|---|---|---|---|
| Pe Pa Př O | Pa Pe Př O | Př Pe Pa O | O Pa Pe Př |
| Pe Pa O Př | Pa Pe O Př | Př Pe O Pa | O Pa Př Pe |
| Pe Př Pa O | Pa Př Pe O | Př Pa Pe O | O Pe Pa Př |
| Pe Př O Pa | Pa Př O Pe | Př Pa O Pe | O Pe Př Pa |
| Pe O Př Pa | Pa O Pe Př | Př O Pe Pa | O Př Pe Pa |
| Pe O Pa Př | Pa O Př Pe | Př O Pa Pe | O Př Pa Pe |

3! = 6 možností OPPP

3! = 6 možností POPP

b) Kolika různými způsoby může závod dopadnout, nerozlišujeme-li jednotlivé závodníky, ale jen města odkud pocházejí?

OPPP POPP PPOP PPPO

| OPPP | POPP |
|---|---|
| Dané; 3 chlívky zaplňujeme 3 pražáky ⇒ 3! možností | Dané + 3 chlívky zaplňujeme 3 pražáky ⇒ 3! možností |

Tady je jasné, že jsou 4 možnosti, podle toho, jak dopadla Ostrava. Je na to ale možné přijít i z výpisu všech možností podle jednotlivců. Ze všech možností dáme do stejné škatulky ty, které jsou stejné z hlediska umístění měst. Např. v červeném chlívku jsou ty případy, kdy Ostrava byla první. Ve všech škatulkách bude 3! = 6 různých umístění jednotlivců ⇒ Celkový počet škatulek = počet různých umístění měst =

$$= \frac{\text{počet umístění jednotlivců}}{\text{počet umístění v jedné škatulce}} = P_3(4) = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{4}$$

Permutace 4 prvků z nichž se 3 opakují

**Př.** Kolika různými způsoby můžeme seřadit 3 červené a 2 zelené kuličky?

○ ○ ○ ○ ○

Kdybychom kuličky rozlišovali, mohli bychom červené označit A, B, C a zelené 1. a 2. Celkem by bylo 5! možností, jak je seřadit. Z těchto 5! = 120 možností ale některé nerozlišujeme například:

A 1 B C 2

C 2 A B 1

počet permutací červených koulí

počet permutací zelených

Tomuto seřazení (č, z, č, č, z) odpovídá $\underbrace{3!\cdot 2!}_{6\cdot 2 = 12}$ seřazení, kde kuličky rozlišujeme

⇒ Každému seřazení kuliček podle barev (jejich počet nás zajímá) odpovídá $3!\cdot 2!$ seřazení kuliček, kdy rozlišujeme jednotlivé kuličky ⇒

$$\text{Počet různých seřazení kuliček podle barvy} = \frac{\text{Počet seřazení kdy je rozlišujeme}}{3!\cdot 2!}$$

$$P_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = \underline{\underline{10}}$$

factorial(5)/(factorial(3)*factorial(2))

Př: Z Noemovy archy jednotlivě vystupují zvířátka. Kolika způsoby mohou zvolit pořadí ve vystupování, jestliže na palubě je 5 zajíců, 3 lišky, 6 prasat a 2 husy? (zvířata stejného druhu nerozlišujeme)

$$P_{5,3,6,2}(16) = \frac{16!}{5!\,3!\,6!\,2!} = \underline{\underline{20\ 180\ 160}}$$

Př: Kolik různých 5-ti ciferných čísel je možné sestavit z cifer 1, 1, 2, 2 a 3?

$$P_{2,2,1}(5) = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = \underline{\underline{30}}$$

Permutace s opakováním: Zaplňujeme $n$ pozic $k$ různými prvky, přičemž 1. se opakuje $n_1$ krát, druhý $n_2$ krát, …, k-tý $n_k$-krát $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$.

Počet permutací $n$ prvků s opakováním $= P_{n_1, n_2, \dots, n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

```
permutace_opak = function(vec_n)      # vec_n je vektor počtů hodnot př.: vec_n = c(5,3,6,2)
{    n = sum(vec_n)        # spočteme kolik máme hodnot celkem
     res_temp = factorial(n)      # jejich faktoriál = hodnota v čitateli
                      # jednoduchý cyklus začíná příkazem for, pak v závorkách následuje název iterátoru
                      # a z jakého seznamu bude brán
     for(pocet in vec_n)      # pocet je iterátor a postupně bude nabývat hodnot z vektoru vec_n
     {                        # postupně dělíme faktoriálem každého počtu unikátních entit
      res_temp=res_temp/factorial(pocet)
      }
     return(res_temp)
}
```

**Variace:** Vybíráme $k$ z $n$ prvků, záleží na pořadí (seřazujeme je do fronty.

> **Př:** Závodu se účastní 5 sportovců. Hodnocena jsou jen první dvě místa. Kolika způsoby může závod dopadnout?

Označme sportovce A, B, C, D, E. Možnosti jak může závod dopadnout:

1.) $\boxed{A}\ \boxed{B}\ \underbrace{\square\,\square\,\square}$

3! možností jak se umístí zbývající

2.) $\boxed{A}\ \boxed{C}\ \underbrace{\square\,\square\,\square}$

3! možností jak je umístí zbývající

⋮

x.) $\boxed{E}\ \boxed{D}\ \underbrace{\square\,\square\,\square}$

3! možností jak se umístí zbývající

$\Rightarrow\quad X \cdot 3! = 5!$ = celkový počet možností jak se umístí 5 závodníků $\Rightarrow$

$$V_2(5) = X = \frac{5!}{3!} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = \underline{\underline{5\cdot4 = 20}}$$

NEBO: Zaplňujeme 2 chlívky:

$\square\ \square \qquad \Rightarrow \quad V_2(5) = 5\cdot4 = \frac{5!}{3!} = \frac{n!}{(n-k)!} = \underline{\underline{20}}$

5 možností pro 1. místo (vybíráme z 5 sportovců)

4 možnosti pro 2. místo (vybíráme ze 4 zbývajících)

Př. Závodu se účastní 20 sportovců. Hodnotí se první 3 místa. Kolika způsoby může závod dopadnout?

Zaplňujeme 3 chlívky: $\square\,\square\,\square$ =>

20 mož. 19 mož. 18 mož.

Celkový počet možností: $V_3(20) = 20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20!}{17!} = \frac{20!}{(20-3)!} = \underline{\underline{6840}}$

Př. Na 5-ti kartičkách jsou napsána čísla 1, 5, 4, 3, 9. Kolik 4-ciferných čísel můžeme z těchto kartiček sestavit?

Zaplňujeme 4 chlívky... $V_4(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \underline{\underline{120}}$

$\square\,\square\,\square\,\square$

5 mož. 4 mož. 3 mož. 2 mož.

Variace k-té třídy z n-prvků bez opakování: Zaplňujeme k pozic prvky z n-prvkové množiny. Prvky se neopakují a záleží na jejich pořadí.

Počet variací k-té třídy z n-prvků: $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

## Variace s opakováním.

Zaplňujeme k chlívků. Záleží na pořadí, do každého chlívku máme na výběr z n prvků - ty se mohou opakovat.

**Př.** Na číselném zámku kufru jsou tři kolečka s ciframi 0 až 9. Kolik možností pro nastavení hesla zámku máme?

$\square\ \square\ \square$

10 možností, 10 možností, 10 možností

$$X = V_3^*(10) = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = n^k = \underline{\underline{1000}}$$

**Př.** Kolik existuje různých 5-ti ciferných přirozených čísel?

$\square\ \square\ \square\ \square\ \square$

9 možností (nesmí začínat 0), 10 možností

$$\Rightarrow X = 9 \cdot V_4^*(10) = \underline{\underline{9 \cdot 10^4}}$$

**Variace k-té třídy z n prvků s opakováním:** Zaplňujeme k pozic prvky z n prvkové množiny. Mohou se opakovat a záleží na pořadí.

Počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním:

$$V_k^*(n) = n^k$$

## Kombinace: Zaplňujeme k chlívků, nezáleží na pořadí.

**Př.** Ze 20 sportovců je třeba vybrat 5-tici do reprezentace. Kolika způsoby je možné tuto pětici vybrat?

Kdybychom spočítali variace 5 z 20, rozlišovali bychom pořadí sportovců v týmu:

variace:

A B C D E
E B C D A
⋮
E D C B A

je jich 5!

odpovídají jediné vybrané kombinaci (týmu) : $\{A, B, C, D, E\}$

$$\Rightarrow \quad X = C_5(20) = \frac{V_5(20)}{5!} = \frac{\frac{20!}{(20-5)!}}{5!} = \frac{20!}{(20-5)!\,5!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \underline{\underline{15\,504}}$$

**Př.** Z 10 knih si na cestu můžeme vybrat 2. Kolika způsoby si knížky můžeme vybrat?

kombinační číslo 10 nad 2

Zaplňujeme 2 pozice nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ $X = C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9}{2!} = \underline{\underline{45}}$

## Kombinace k-té třídy z n prvků: Zaplňujeme k pozic prvky z n-prvkové množiny. Neopakují se, nezáleží na pořadí (tvoříme k-prvkové podmnožiny n-prvkové množiny).

Počet kombinací k-té třídy z n prvků:

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

## Kombinace s opakováním: 
*Zaplňujeme $k$ pozic $n$ prvky. Mohou se opakovat, ale nezáleží na pořadí.*

**Př.** V sáčku je mnoho ($\geq 3$) modrých, červených a žlutých kuliček. Kuličky stejné barvy nerozlišujeme. Kolika možnostmi můžeme vybrat 3?

nezáleží na pořadí ; jiný zápis:

| Čer. | Mo. | Žl. |
|---|---|---|
| ••• \| | \| | |
| •• \| | • \| | |
| •• \| | \| | • |
| • \| | •• \| | |
| • \| | • \| | • |
| • \| | \| | •• |
| \| | ••• \| | |
| \| | •• \| | • |
| \| | • \| | •• |
| \| | \| | ••• |

záleží na pořadí!

Označme: $k$ ... počet vybraných kuliček (pozic)

$n$ ... počet různých barev

počet kuliček $= 3 = k$

počet „oddělovačů |" $= 2 = n-1$ $\Big\}\Rightarrow$

Zaplňujeme $3+2 = n+k-1$ pozic

5 prvky (vždy 3 tečky a 2 oddělovače)

z nichž 2 a 3 se opakují $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{C_3^*(5)}{X} = P_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n+k-1-k)!} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{5\cdot 4}{2!} = 10$$

**Př.** 5 dědiců si má rozdělit 10 zděděných oslů. Kolika způsoby je možné to udělat?

Každému oslovi (pozici $\Rightarrow k=10$) přiřadíme jednoho z dědiců ($n=5$). $\Rightarrow$

$$X = C_{10}^*(5) = \binom{10+5-1}{10} = \binom{14}{10} = \frac{14!}{10!\,4!} = \frac{14\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot 11}{\cancel{4\cdot 3}\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 13\cdot 11 = 1001$$

**Kombinace $k$-té třídy z $n$ prvků s opakováním:** *Zaplňujeme $k$ pozic prvky $n$-prvkové množiny. Nezáleží na pořadí a prvky se mohou opakovat.*

**Počet** kombinací $k$-té třídy z $n$ prvků s opakováním:

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

# Klasická pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost jevu A : $P(A) = \dfrac{\text{Počet možností, kdy nastane A}}{\text{Počet všech možností}}$

Předpokládáme, že všechny možnosti mohou nastat se stejnou pravděpodobností!

Př. Ve frontě stojí Karel a Pepa a 8 dalších lidí.

a) Určete pravděpodobnost, že Karel stojí ve frontě první.

Počet všech možností: $P(10)$ ... 10 lidí ve frontě

Počet možností kdy K je 1.: $\boxed{K}\ \underbrace{\square \dots \square}_{9 \text{ lidí ve frontě}} = P(9)$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{P(9)}{P(10)} = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$

b) Určete pravděpodobnost, že Karel je první a Pepa poslední.

$\boxed{K}\ \underbrace{\square \dots \square}_{8! \text{ možností}}\ \boxed{P}$ $\Rightarrow$ $P(B) = \dfrac{8!}{10!} = \dfrac{1}{10 \cdot 9} = \dfrac{1}{90}$

c) Určete pravděpodobnost, že Karel stojí před Pepou (nemusí hned před ním).

1.) $\boxed{K}\square\square\square\square\square\square\square\square\square$ $\quad 9! = 8! \cdot 9$

2.) $\square\boxed{K}\square\square\square\square\square\square\square\square$ $\quad 8 \cdot 8! = 8! \cdot 8$

8 možností, Pepa tam není!

3.) $\square\square\boxed{K}\square\square\square\square\square\square\square$ $\quad 8 \cdot 7 \cdot 7! = \frac{8!}{6!} \cdot 7! = 8! \cdot 7$

8 možn. 7 možn. 7! možností

4.) $\underbrace{\square\square\square}_{8\ 7\ 6}\boxed{K}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{6!}$ $\quad 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6! = \frac{8!}{5!} \cdot 6! = 8! \cdot 6$

5.) $\underbrace{\square\square\square\square}_{8\ 7\ 6\ 5}\boxed{K}\underbrace{\square\square\square\square\square}_{5!}$ $\quad 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5! = \frac{8!}{4!} \cdot 5! = 8! \cdot 5$

⋮

9.) $\underbrace{\square\square\square\square\square\square\square\square}_{8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1}\boxed{K}\underbrace{\boxed{P}}_{1!}$ $\quad 8! \cdot 1! = 8! \cdot 1$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{8!\,\overbrace{(9+8+7+\dots+2+1)}^{\frac{9+1}{2} \cdot 9 = 45}}{10!} = \frac{45}{10 \cdot 9} = \frac{1}{2}$$

Př. Určete klasickou pravděpodobnost jevu, že mezi všemi čtyřcifernými čísly vybereme

a) Číslo začínající cifrou 3

Všechny možnosti: $\underset{9 \text{ možností}}{\square}\underbrace{\square\square\square}_{10^3 \text{ možností}}$ Čtyřciferné číslo nesmí začínat nulou

$\Rightarrow$ $9 \cdot 10^3$ možností

Začíná na 3: $\boxed{3}\underbrace{\square\square\square}_{10^3 \text{ možností}}$ $\Rightarrow$ $10^3$ možností

$$\Rightarrow P(A) = \frac{10^3}{9 \cdot 10^3} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

b) Číslo sudé

zde nesmí být 0

$A_1 = \square\square\square\boxed{0}$ $\Rightarrow$ $9 \cdot 10 \cdot 10$ možností

$A_2 = \square\square\square\boxed{2}$ $\Rightarrow$ $9 \cdot 10 \cdot 10$ možností

$A_3 = \square\square\square\boxed{4}$ $\Rightarrow$ $9 \cdot 10 \cdot 10$ možností

$A_4 = \square\square\square\boxed{6}$ $\Rightarrow$ $9 \cdot 10 \cdot 10$ možností

$A_5 = \square\square\square\boxed{8}$ $\Rightarrow$ $9 \cdot 10 \cdot 10$ možností

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5 \cdot 9 \cdot 10^2}{9 \cdot 10^3} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_5)$

c) Číslo sestavené z cifer 1, 1, 2 a 2.

$\square\square\square\square$ Zaplňujeme 4 pozice 4mi prvky, ale ty se opakují $\Rightarrow$ permutace s opakováním $P_{2,2}(4) = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{6}{9 \cdot 10^3} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} = 0{,}\bar{6} \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0{,}000\bar{6}}}$$

**Př.** Do soutěže se hlásí zástupci 10 různých zemí (včetně ČR i SR). Pro soutěž však budou vybráni pouze čtyři z nich (za každou zemi jeden). a) Určete klasickou pravděpodobnost toho, že bude vybrán i zástupce ČR.

a) Všechny možnosti : Vybíráme 4 ze 10, nezáleží na pořadí $= \binom{10}{4}$

A = Je vybrán čech : Vybíráme už jen 3 zástupce z 9 zbývajících $= \binom{9}{3}$

$$P(A) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{9!}{3!\,6!}}{\frac{10!}{4!\,6!}} = \frac{9!\;4!\;6!}{10!\;3!\;6!} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = \frac{2}{5}$$

je vybrán zástupce ČR

b) Je vybrán zástupce ČR i SR.

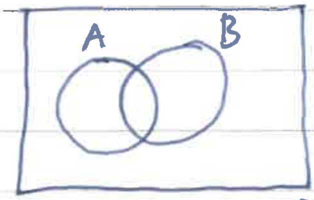
B = Je vybrán slovák

Jestliže je vybrán zástupce ČR i SR ⇒ zbývá vybrat 2 z 8 států ⇒

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{8!\;4!\;\cancel{6!}}{2!\;\cancel{6!}\;10!} = \frac{4\cdot 3}{10\cdot 9} = \frac{4}{10\cdot 3} = 0{,}1\overline{3} = \frac{2}{15}$$

je vybrán zástupce SR

c) Je vybrán zástupce ČR nebo SR




α) $P(A \cup B) = \underbrace{\frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}}}_{\text{je vybrán ČR i SR}} + \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{4}} =$

Je vybrán ČR ale ne SR

Je vybrán SR, ale ne ČR

$\binom{8}{3}$ možn.

$$= \frac{4}{10\cdot 3} + 2\cdot\frac{\frac{8!}{3!\,5!}}{\frac{10!}{4!\,6!}} = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{8!\,6!\,4!\cdot 2}{10!\,5!\,3!} = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6\cdot 4\cdot 2}{10\cdot 9} = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

β)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{6+6-2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

d) Není vybrán zástupce ČR, ani SR. = jev $C$

vybíráme 4 účastníky jen z 8 států

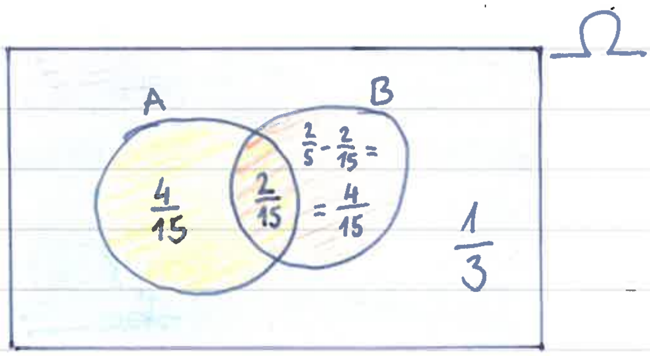
$$\alpha)\ P(C) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{8!\ \cancel{4!}\ 6!}{4!\ \cancel{4!}\ 10!} = \frac{6\cdot 5}{10\cdot 9} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

nebo:

jev jistý = všechny možnosti

$$\beta)\quad C = \Omega - (A\cup B) = \overline{A\cup B}$$

$$P(C) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$




a opravdu, $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{5+4+2+4}{15} = \frac{15}{15} = 1 = P(\Omega).$

**Př.** Ve třídě je 10 dívek a 12 chlapců. Náhodně vybereme 5 z nich.

a) Určete pravděpodobnost, že mezi vybranými budou pouze dívky. = jev A

$$P(A) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{22}{5}} = \frac{\frac{10!}{5!\,5!}}{\frac{22!}{5!\,17!}} = \frac{17!\,10!\,\cancel{5!}}{22!\,5!\,\cancel{5!}} = \frac{10\cdot\cancel{9}\cdot8\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}}{22\cdot\cancel{21}\cdot20\cdot19\cdot\cancel{18}} = \frac{2}{11\cdot19} = \underline{\underline{\frac{2}{209}}} \doteq 0{,}01$$

$\binom{10}{5}$ ← vybíráme 5 dětí z 10 dívek

$\binom{22}{5}$ ← vybíráme 5 dětí z 22 celkem

b) Určete pravděpodobnost, že mezi vybranými jsou 3 dívky a 2 chlapci. = jev B

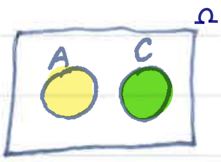
$\underbrace{\square\square\square}_{\binom{10}{3}\text{ možností}}\ \underbrace{\square\square}_{\binom{12}{2}\text{ možností}}$

$$P(B) = \frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{22}{5}} = \frac{\frac{\cancel{10!}}{3!\,7!}\,\frac{12!}{\cancel{10!}\,2!}}{\frac{22!}{5!\,17!}} = \frac{17!\,12!\,5!}{22!\,7!\,3!\,2!} = \frac{2\cdot4\cdot5}{11\cdot7\cdot19} = \underline{\underline{\frac{40}{1463}}} \doteq 0{,}03$$

c) Určete pravděpodobnost, že mezi vybranými budou pouze chlapci. = jev C

$$P(C) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{22}{5}} = \frac{17!\,12!\,\cancel{5!}}{22!\,7!\,\cancel{5!}} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18} = \underline{\underline{\frac{4}{7\cdot19}}} \doteq 0{,}03$$

d) Určete pravděpodobnost, že mezi vybranými budou chlapci i dívky.




$$x = P(\overline{A\cup C}) = 1 - P(A\cup C) = 1 - (P(A) + P(B) - \underbrace{P(\overbrace{A\cap C}^{=\emptyset})}_{=0}) =$$

$$= 1 - \frac{2}{11\cdot19} - \frac{4}{7\cdot19} = \frac{11\cdot7\cdot19 - 2\cdot7\cdot\ \ -4\cdot11}{11\cdot7\cdot19} = \underline{\underline{\frac{1405}{1463}}} \doteq 0{,}96$$

Nebo sečteme pravděpodobnosti, že je tam 1, 2, 3 nebo 4 dívky.