Geometrická pravděpodobnost

Př: Karel a Josef si domluví setkání neurčitém místě kdykoli mezi 2. a 3. hodinou od poledne. Jestliže Karel přijde dříve, má počkat 10 minut. Jestliže Josef přijde první, počká 20 minut. S jakou pravděpodobností se Karel a Josef setkají!?

X... doba od 2:00, kdy přijde Karel (tj. přijde v 2:00 + X minut) => $X \in (0, 60)$

y... doba od 2:00, kdy přijde Josef (tj. přijde v 2:00 + y minut) => $y \in (0, 60)$

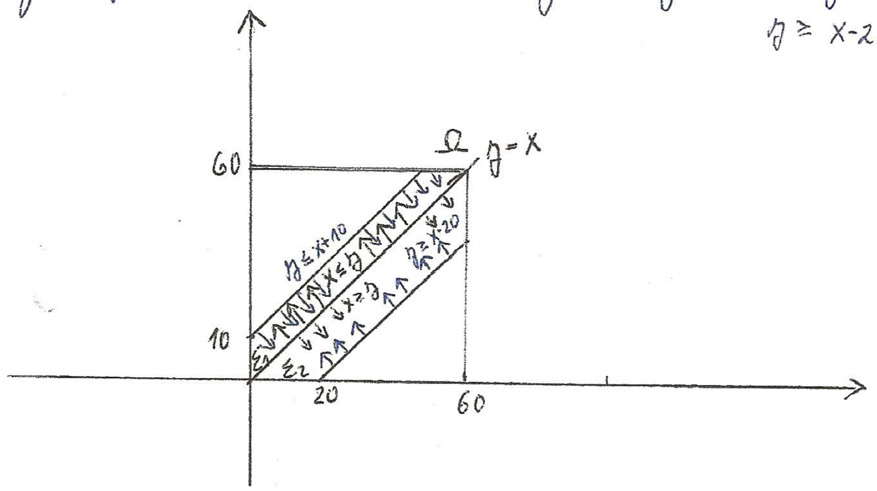
a) Karel přijde dříve ($X \leq y$)

Potkají se, když $y \leq X + 10$

b) Josef přijde dříve ($X \geq y$)

Potkají se, když $X \leq y + 20$

$y \geq X - 20$



A ... potkají se =>

$$P(A) = \cancel{\frac{|\Omega|}{|\Omega|}} = \frac{|\Sigma_1| + |\Sigma_2|}{|\Omega|} = \frac{60^2 - \frac{50^2}{2} - \frac{40^2}{2}}{60^2}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{50^2 + 40^2}{60^2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5^2+4^2}{6^2}\right) = 1 - \frac{41}{72} = \frac{31}{72} = \underline{\underline{0{,}4305}}$$

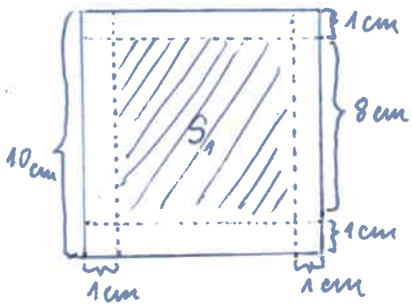
Poznámka: Zadání a tím i výpočet nejsou zcela korektní. Předpokládáme (intuitivně), všechny okamžiky mezi 2:00 a 3:00 mají stejnou šanci (hustotu pravděpodobnosti), že přijde Karel, respektive Josef.

Př. Kruhový terč o poloměru 20 cm má kruhový černý střed o poloměru 10 cm. Předpokládejme, že šipka jistě zasáhne terč a že hustota pravděpodobnosti zasažení daného místa na terči je konstantní. Určete geometrickou pravděpodobnost, že šipka zasáhne černý střed terče. = jev A

$$P(A) = \frac{\text{plocha středu}}{\text{plocha terče}} = \frac{\pi \cdot 10^2}{\pi \cdot 20^2} = \left(\frac{10}{20}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Př. (Buffonova úloha) Mince dopadne na šachovnicovou podlahu, kde délka strany jednoho pole je 10 cm. Poloměr mince je 1 cm. S jakou pravděpodobností bude mince ležet uvnitř jednoho z polí šachovnice?

Střed mince určitě dopadne do jednoho z polí (nebo na jeho hranici). Mince nebude z tohoto pole vyčnívat, pokud její střed dopadne do vyšrafované části



$$P(A) = \frac{\text{plocha } S_1}{\text{plocha celého pole}} = \frac{8^2}{10^2} = \underline{\underline{0{,}64}}$$

Pravděpodobnost

Ω ... množina elementárních jevů (např. všechny možné výsledky hodu kostkou)

Σ ... σ-algebra jevů = množina (ne nutně všech) podmnožin Ω

musí splňovat:

1.) $\emptyset \in \Sigma$

2.) $A \in \Sigma \Rightarrow \Omega - A \in \Sigma$ (např. A = padne sudé číslo)

3.) $\forall i \in \mathbb{N}: A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

$P: \Sigma \to \mathbb{R}$ ... pravděpodobnostní funkce: musí splňovat:

1.) $P(\Omega) = 1$ .... pravděpodobnost jevu jistého je 1

2.) $\forall A \in \Sigma: P(A) \geq 0$

3.) $\forall i \in \mathbb{N}: A_i \in \Sigma;\ A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

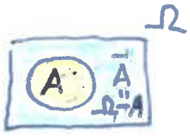
$\Rightarrow (\Omega\ \Sigma\ P)$ nazýváme pravděpodobnostním prostorem.

Vlastnosti:

1.) $P(\emptyset) = 0$

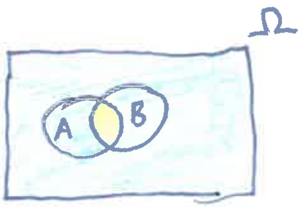
2.) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3.) $P(\underbrace{\bar{A}}_{\Omega - A}) = 1 - P(A)$

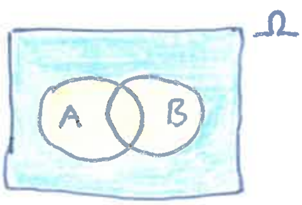


De Morganovy zákony:

4.) $P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$

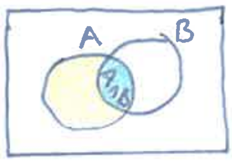


5.) $P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$



Podmíněná pravděpodobnost:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

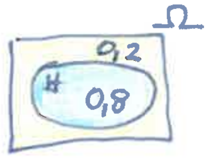


A a B jsou nezávislé, když: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Př. Výrobek má správný rozměr s pravděpodobností 0,7 a chybnou hmotnost s pravděpodobností 0,2. Výrobek je bezchybný (má správný rozměr i hmotnost) s pravděpodobností 0,6.

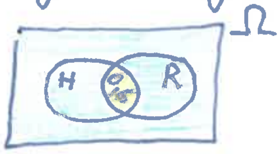
Označme: R… má správný rozměr   H… má správnou hmotnost

a) Určete $P(H)$



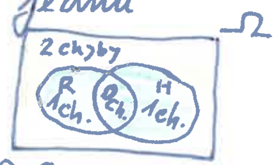
$$P(\overline{H}) = 0{,}3 \Rightarrow P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - 0{,}2 = \underline{\underline{0{,}8}}$$

b) Určete pravděpodobnost, že výrobek má nějakou chybu.



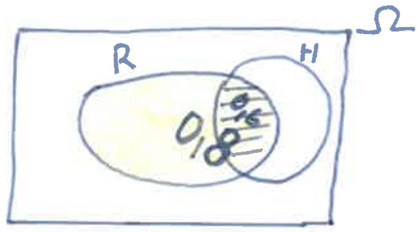
$$X = P(\overline{H} \cup \overline{R}) \underset{\text{de Morganův zákon}}{=} P(\overline{H \cap R}) = 1 - \underbrace{P(H \cap R)}_{\substack{0{,}6 \\ \text{ze zadání}}} = \underline{\underline{0{,}4}}$$

c) Určete pravděpodobnost, že výrobek má nejvýše jednu z chyb (rozměr, hmotnost).



$$x = P(H \cup R) = \underbrace{P(H)}_{0{,}8} + \underbrace{P(R)}_{0{,}7} - \underbrace{P(H \cap R)}_{0{,}6} = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}6 = \underline{\underline{0{,}9}}$$

d) Určete pravděpodobnost, že výrobek má správnou hmotnost, víte-li, že má správný rozměr.



$$P(H|R) = \frac{P(H \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

Celkem je x výrobků ⇒ ve skladu, kde jsou výrobky se správným rozměrem je 0,8.x výrobků. Je mezi nimi 0,6.x výrobků, které mají správnou hmotnost ⇒ Pravděp. že mezi „R" výrobky najdeme „H" výrobek je $\frac{0{,}6 \cdot x}{0{,}8 \cdot x} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{6}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

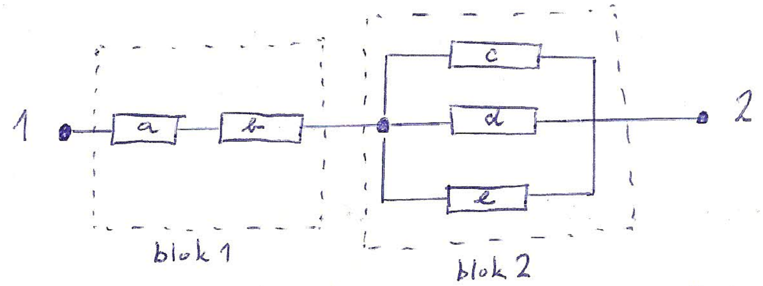
e) Ověřte, zda jevy R a H jsou nezávislé.

$$\text{jsou nezávislé} \Leftrightarrow \underbrace{P(R \cap H)}_{0{,}6} = \underbrace{P(R) \cdot P(H)}_{0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56},$$

$\Rightarrow P(R \cap H) \neq P(R) \cdot P(H) \Rightarrow$ <u>NEJSOU NEZÁVISLÉ</u>

Kdyby byly nezávislé, čekali bychom, že mezi R výrobky (0,7.x) je 80% se správ. hmotností ⇒ R∩H výrobků by bylo 0,8·(0,7·x) = 0,56·x, ale je jich 0,6·x !!!

Př 2.: Součástky a, b, c, d, e jsou sestaveny podle schématu:



Určete pravděpodobnost, že z bodu 1 do bodu 2 teče el. proud, jestliže:

A... součástkou a protéká proud, B... součástkou b protéká proud, ...

a je zadáno:

$P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}8$, $P(C) = 0{,}5$, $P(D) = 0{,}7$, $P(E) = 0{,}6$

Jevy A, B, C, D, E jsou nezávislé.

⇒ Označme:

$P(\aleph)$ .... pravděpodobnost, že blokem 1 protéká proud.

$P(\beth)$ .... pravděpodobnost, že blokem 2 protéká el. proud.

$P(X)$ .... Pravděpodobnost, že z 1 do 2 teče el. proud.

a) $\aleph = A \cap B$

$\Rightarrow P(\aleph) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$

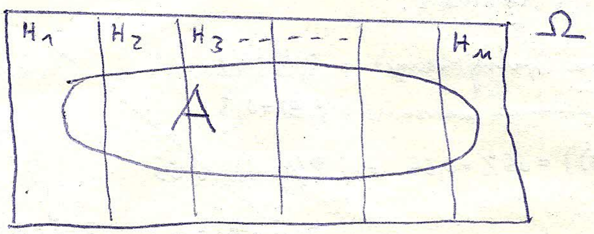
b) $\beth = \Omega - \bar{\beth} = \Omega - (\bar{C} \cap \bar{D} \cap \bar{E})$

$\Rightarrow P(\beth) = 1 - P(\bar{C} \cap \bar{D} \cap \bar{E}) = 1 - P(\bar{C})P(\bar{D})P(\bar{E}) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}94$

$\Rightarrow X = \aleph \cap \beth$

$P(X) = P(\aleph \cap \beth) = P(\aleph) \cdot P(\beth) = 0{,}72 \cdot 0{,}94 = \underline{\underline{0{,}6768}}$

Věta o úplné pravděpodobnosti



Věta: Nechť $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ je úplný systém vzájemně disjunktních jevů ($H_i \cap H_j = \emptyset$ pro $i \neq j$; $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$), potom pro libovolný jev A platí:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A|H_i)$$

Př: Byly zakoupeny chladničky typu A, B a C. Celkem 12 typu A, 20 typu B a 18 typu C. Pravděpodobnost, že chladnička je bez závady je u typu A 0,9, u typu B 0,6 a u typu C 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná chladnička (ze všech zakoupených) je bez závady?

H_1 ... chladnička je typu A $\Rightarrow P(H_1) = \frac{12}{50}$ $P(A|H_1) = 0{,}9$

H_2 ... chladnička je typu B $P(H_2) = \frac{20}{50}$ $P(A|H_2) = 0{,}6$

H_3 ... chladnička je typu C $P(H_3) = \frac{18}{50}$ $P(A|H_3) = 0{,}9$

A ... chladnička je bez závady

$$P(A) = \frac{12}{50} \cdot 0{,}9 + \frac{20}{50} \cdot 0{,}6 + \frac{18}{50} \cdot 0{,}9 = \underline{\underline{0{,}78}}$$

Př: Z ponorky byla na cíl vystřelena 4 torpéda. Při zásahu 1 torpédem je pravděpodobnost zničení cíle 0,6; při zásahu 2 torpédy 0,8 a při zásahu více než ~~dvěma~~ torpédy je cíl zničen ~~s~~ jistě.

Označíme-li H_k, $k = 0, 1, \dots, 4$ jev, kdy ponorka zasáhne cíl k torpédy, pak

$P(H_1) = 0{,}4116$

$P(H_2) = 0{,}2646$

$P(H_3) = 0{,}0756$

$P(H_4) = 0{,}0081$

Jaká je pravděpodobnost zničení cíle?

A ... cíl je zničen $\Rightarrow$

$P(A|H_0) = 0$

$P(A|H_1) = 0{,}6$

$P(A|H_2) = 0{,}8$

$P(A|H_3) = 1$

$P(A|H_4) = 1$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=0}^{4} P(H_i)\,P(A|H_i) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)\,P(A|H_i) = 0{,}54234$$

Př: Novákovi půjdou s pravděpodobností 0,4 do ZOO, s pravděpodobností 0,35 do kina a s pravděpodobností 0,25 na lyže. Způsobí si úraz s pravděpodobností 0,03 v ZOO, 0,01 v kině a 0,1 na lyžích. S jakou pravděpodobností si způsobí úraz?

A … způsobí si úraz, H_1 … jdou do ZOO H_2 … jdou do kina
H_3 … jdou na lyže

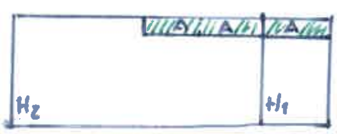
$P(H_1) = 0{,}4 \qquad P(A|H_1) = 0{,}03$
$P(H_2) = 0{,}35 \qquad P(A|H_2) = 0{,}01$
$P(H_3) = 0{,}25 \qquad P(A|H_3) = 0{,}1$

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}03 + 0{,}35 \cdot 0{,}01 + 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}012 + 0{,}0035 + 0{,}025 = \underline{\underline{0{,}0405}}$$

Př: Mezi 100 planet je 20 obyvatelných pro člověka. Víte, že na jedné pětině pro člověka obyvatelných planet je k dostání pivo a jen na jedné desetině planet neobyvatelných je také možné sehnat pivo. Náhodně na jedné planetě přistanete. S jakou pravděpodobností si tam můžete koupit pivo?

A … můžu koupit pivo H_1 … planeta je obyvatelná H_2 … planeta je neobyvatelná

$P(H_1) = \frac{20}{100} = 0{,}2 \qquad P(A|H_1) = \frac{1}{5} = 0{,}2$
$P(H_2) = \frac{80}{100} = 0{,}8 \qquad P(A|H_2) = \frac{1}{10} = 0{,}1$



$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}04 + 0{,}08 = \underline{\underline{0{,}12}}$$

Koupili jste si pivo, s jakou pravděpodobností to bylo na neobyvatelné planetě?

$$P(H_2|A) = \frac{0{,}08}{0{,}12} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} = \frac{P(A \cap H_2)}{P(A)} = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)}$$ = Bayesova věta

Př: 25% vozů porušuje normu obsahu škodlivých látek ve výfukových plynech. Pravděpodobnost, že takový vůz neprojde technickou kontrolou je 99%. Z vozů, které tuto normu neporušují neprojde asi 17%. Jaká je pravděpodobnost, že vůz kontrolou neprojde?

H_1 --- porušuje normu obsahu...
H_2 ---- neporušuje normu obsahu...
A ---- vůz neprojde kontrolou

$\Rightarrow P(H_1) = 0{,}25 \quad P(A|H_1) = 0{,}99 \quad ; \quad P(H_2) = 0{,}75 \quad P(A|H_2) = 0{,}17$

$P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}99 + 0{,}75 \cdot 0{,}17$

$P(A) = 0{,}375$

Př: Tři ~~závody~~ továrny vyrábí součástky. První vyrábí 45% celkové produkce, druhý 40% a třetí 15%. V produkci první ~~závod~~ továrny ~~je~~ ~~~~ 70% kvalitních součástek z produkce 2. továrny je 80% výrobků kvalitních a z produkce třetí ~~~~ je 90% kvalitních. S jakou pravděpodobností si zákazník koupí kvalitní součástku?

H_1... součástka je z 1. továrny $\quad P(H_1) = 0{,}45 \quad P(A|H_1) = 0{,}7$
H_2--- součástka je z 2. továrny $\quad P(H_2) = 0{,}4 \quad P(A|H_2) = 0{,}8$
H_3--- součástka je z 3. továrny $\quad P(H_3) = 0{,}15 \quad P(A|H_3) = 0{,}9$
A... součástka je kvalitní

$P(A) = 0{,}45 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0{,}9$

$P(A) = 0{,}77$

Bayesova věta

Věta: Nechť $H_1, H_2, \ldots, H_n$ je úplný systém navzájem disjunktních jevů. Potom pro libovolný jev A, kde $P(A) \neq 0$ platí:

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ platí:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\, P(A|H_j)}$$

Př: Ocelové odlitky jsou kontrolovány rentgenem, který odhalí chybu v odlitku s pravděpodobností 0,98 a dobrý odlitek označí za chybný s pravděpodobností 0,001. Je známo, že chyba se objevuje u 0,3 % odlitků. Jaká je pravděpodobnost, že odlitek označený jako vadný ~~jaapa~~ má opravdu chybu?

H_1 --- odlitek má chybu $\qquad P(H_1) = 0{,}003 \qquad P(A|H_1) = 0{,}98$

H_2 --- odlitek nemá chybu $\qquad P(H_2) = 0{,}997 \qquad P(A|H_2) = 0{,}001$

A --- přístroj označí odlitek za chybný

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)}$$

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}003 \cdot 0{,}98}{0{,}003 \cdot 0{,}98 + 0{,}997 \cdot 0{,}001}$$

$$P(H_1|A) = 0{,}75$$

Př: V určité společnosti je 45 % mužů a 55 % žen. Vyšších nad 180 cm je 5 % mužů a 1 % žen. Náhodně vybraná osoba má více než 180 cm. S jakou pravděpodobností je to žena?

H_1 --- vybraná osoba je muž $\qquad P(H_1) = 0{,}45 \qquad P(A|H_1) = 0{,}05$

H_2 --- vybraná osoba je žena $\qquad P(H_2) = 0{,}55 \qquad P(A|H_2) = 0{,}01$

A --- vybraná osoba má více než 180 cm

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_2) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}01}{0{,}45 \cdot 0{,}05 + 0{,}55 \cdot 0{,}01}$$

$$P(H_2|A) \doteq 0{,}2$$

Př. Z ponorky byla na cíl vystřelena 4 torpéda. Pravděpodobnost potopení cíle je 0,6 při zásahu jedním torpédem; 0,8 při zásahu dvěma torpédy; 1 při zásahu třemi, nebo čtyřmi torpédy.
Označme H_k jev, kdy je cíl zasažen k torpédy. Je dáno, že

$P(H_1) = 0{,}411$
$P(H_2) = 0{,}265$
$P(H_3) = 0{,}076$
$P(H_4) = 0{,}008$

a) Určete pravděpodobnost, že cíl není zasažen.

$$P(H_0) = 1 - (P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4)) = 1 - 0{,}411 - 0{,}265 - 0{,}076 - 0{,}008 = \underline{\underline{0{,}24}}$$

b) Určete pravděpodobnost potopení cíle. = jev A

$P(H_0) = 0{,}24 \quad P(A|H_0) = 0$
$P(H_1) = 0{,}411 \quad P(A|H_1) = 0{,}6$ vynásobením dostanu pravděpodobnost potopení 1 torpédem
$P(H_2) = 0{,}265 \quad P(A|H_2) = 0{,}8$
$P(H_3) = 0{,}076 \quad P(A|H_3) = 1$
$P(H_4) = 0{,}008 \quad P(A|H_4) = 1$

$$P(A) = \sum P(H_i)P(A|H_i) = 0{,}24 \cdot 0 + 0{,}411 \cdot 0{,}6 + 0{,}265 \cdot 0{,}8 + 0{,}076 \cdot 1 + 0{,}008 \cdot 1 \doteq \underline{\underline{0{,}543}}$$

c) Cíl byl potopen, určete pravděpodobnost, že byl zasažen 2 torpédy.

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}265 \cdot 0{,}8}{0{,}411 \cdot 0{,}6 + 0{,}265 \cdot 0{,}8 + 0{,}076 + 0{,}008} \doteq \underline{\underline{0{,}391}}$$

d) Cíl byl potopen, určete pravděpodobnost, že byl zasažen více než dvěma torpédy.

$$x = P(H_3|A) + P(H_4|A) = \frac{\overbrace{0{,}076 \cdot 1 + 0{,}008 \cdot 1}^{P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4)}}{0{,}411 \cdot 0{,}6 + 0{,}265 \cdot 0{,}8 + 0{,}076 \cdot 1 + 0{,}008 \cdot 1} \doteq \underline{\underline{0{,}155}}$$

Př: Na skladě je 70% první jakosti a 30% druhé jakosti ⑥
Pravděpodobnost, že přístroj 1. jakosti pracuje bez poruchy více než t hodin je 0,95 a pro přístroj 2. jakosti je to 0,7.
Určitý přístroj pracoval bez poruchy více než t hodin.
S jakou pravděpodobností je tento přístroj 1. jakosti?

H_1 ... přístroj je 1. jakosti $\quad P(H_1) = 0{,}7 \quad P(A|H_1) = 0{,}95$

H_2 ... přístroj je 2. jakosti $\quad P(H_2) = 0{,}3 \quad P(A|H_2) = 0{,}7$

A ... přístroj pracoval více než t hodin

$$\rightarrow \quad P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)}$$

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}7\cdot 0{,}95}{0{,}7\cdot 0{,}95 + 0{,}3\cdot 0{,}7} = 0{,}76$$