Náhodná veličina

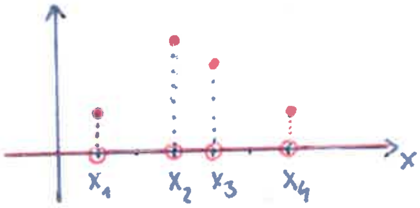
Funkci $X : \Omega \to \mathbb{R}$, kde Ω je množina elementárních jevů nazveme náhodnou veličinou (tj. náhodná veličina přiřazuje jevům čísla). Značíme je velkými písmeny.

Diskrétní NV

Nabývá jen konečně, nebo spočetně mnoho hodnot $x_1, x_2, \dots$

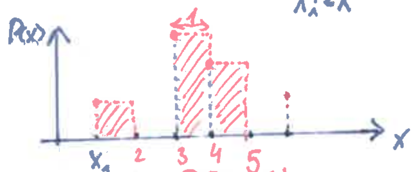
Pravděpodobnostní funkce

$$P(x) = P(X = x)$$



Distribuční funkce

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$



$S = P(X < 5)$

Střední hodnota: $EX = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i)$

Rozptyl: $DX = \sigma_x^2 = \sum_{x_i} (x_i - EX)^2 P(X = x_i)$

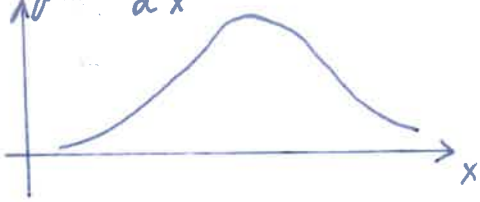
Směrodatná odchylka: $\sigma_x = \sqrt{DX}$

Spojitá NV

Nabývá hodnot z nějakého intervalu.

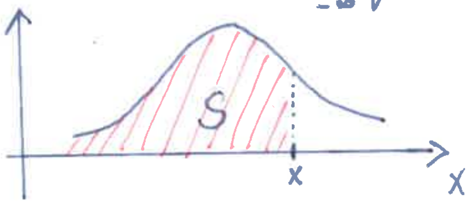
Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$



Distribuční funkce

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = S$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Střední hodnota: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$

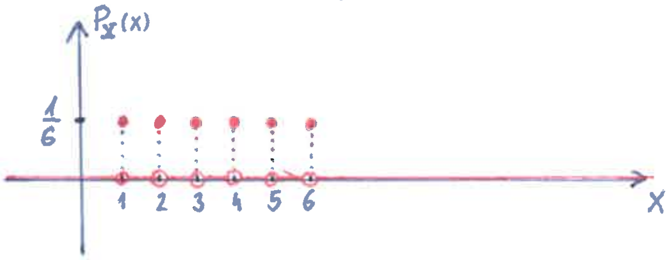
Rozptyl: $DX = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)\,dx$

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

Směrodatná odchylka: $\sigma = \sqrt{DX}$

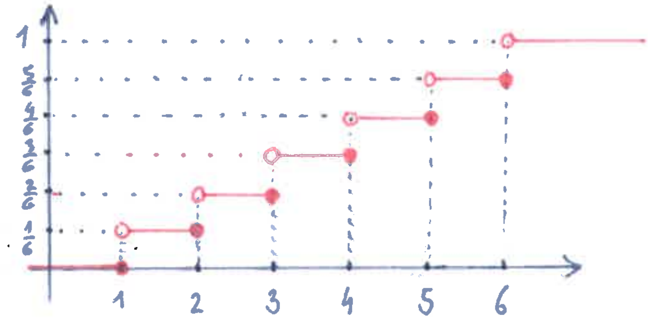
Př. Náhodná veličina X nabývá hodnot $x_i \in \{1,2,\dots,6\}$ s pravděpodobností $P(X=x_i)=\frac{1}{6}$. (X – čísla které padnou na férové kostce)

a) Načrtněte graf pravděpodobnostní funkce $P_X(x)$



b) Načrtněte graf distribuční funkce $F_X(x)$ a určete její předpis.

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{pro } x\in(-\infty,1\rangle \\ \frac{1}{6}, & \text{pro } x\in(1,2\rangle \\ \frac{2}{6}, & \text{pro } x\in(2,3\rangle \\ \frac{3}{6}, & \text{pro } x\in(3,4\rangle \\ \frac{4}{6}, & \text{pro } x\in(4,5\rangle \\ \frac{5}{6}, & \text{pro } x\in(5,6\rangle \\ 1, & \text{pro } x\in(6,\infty) \end{cases}$$



$F_X(1) = P(X<1) = 0$; $F(3) = P(X=1)+P(X=2)$

F_X je neklesající a z leva spojitá;
$F_X(x) \to 1$ pro $x \to \infty$; $F_X(x) \to 0$ pro $x \to -\infty$

c) Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

$$EX = \sum_{x_i} x_i\, P(X=x_i) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1+6}{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = \underline{\underline{3{,}5}}$$

d) Určete střední hodnotu náhodné veličiny $Y = X^2$

$$EY = EX^2 = \sum_{y_i} y_i\, P(Y=y_i) = \sum_{x_i} x_i^2\, \underbrace{P(Y=x_i^2)}_{P(X=x_i)} = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6} + 4^2\cdot\frac{1}{6} + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\cdot\frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{91}{6}}}$$

e) Určete rozptyl náhodné veličiny X.

$$DX = \sum_{x_i} (x_i - EX)^2\cdot P(X=x_i) = \left(1-\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{6} + \left(2-\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{6} + \left(3-\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{6} + \left(4-\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{6} + \left(5-\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{6} + \left(6-\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{6} =$$

$$= \left(\frac{25+9+1+1+9+25}{4}\right)\frac{1}{6} = \frac{70}{4}\cdot\frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{35}{12}}}$$

NEBO:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \underline{\underline{\frac{35}{12}}} = 2.91\overline{6}$$

Modus NV Y = hodnota s nejvyšší pravděpodobností => modus Y = 1 ale také 2,3,4,5 a 6.

② Náhodná veličina je zadána tabulkou pravděpodobnosti:

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,1	0,2	0,3	0,4

Modus NV X = 3

Sestrojte distribuční a pravděpodobnostní funkci, jejich grafy a nalezněte střední hodnotu EX a DX

Distribuční funkce

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

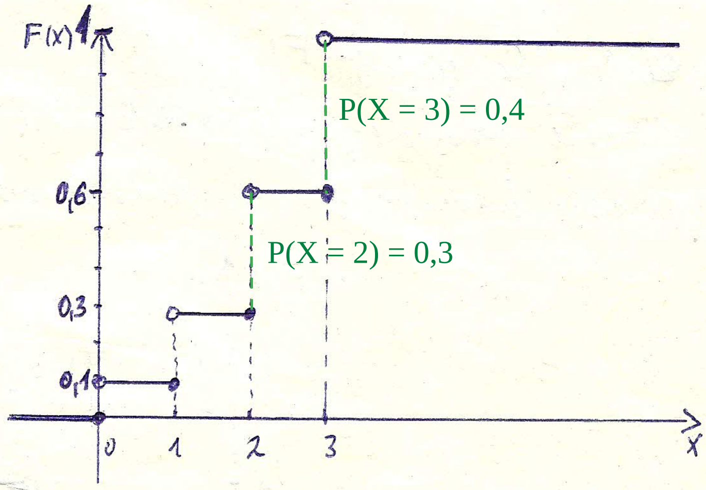
$F(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, 0\rangle$

$F(x) = 0{,}1$ pro $x \in (0, 1\rangle$

$F(x) = 0{,}3$ pro $x \in (1, 2\rangle$

$F(x) = 0{,}6$ pro $x \in (2, 3\rangle$

$F(x) = 1$ pro $x \in (3, \infty)$



Pravděpodobnostní funkce

$$P(x) = P(X = x)$$

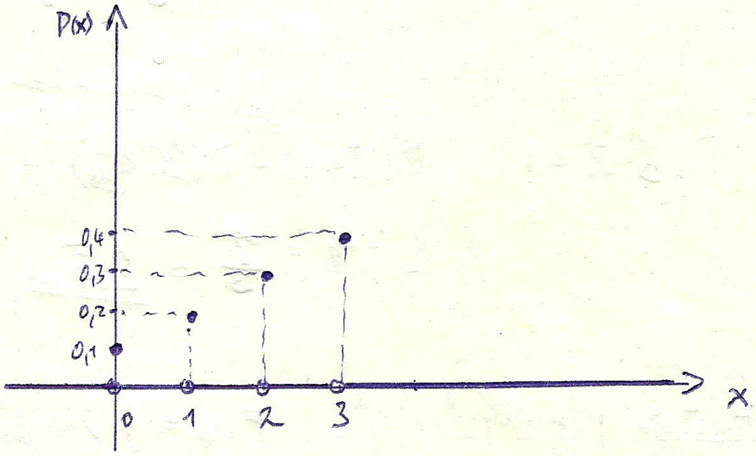
$P(0) = 0{,}1$

$P(1) = 0{,}2$

$P(2) = 0{,}3$

$P(3) = 0{,}4$

$P(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$



Střední hodnota

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$$

$$EX = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}2 = \underline{\underline{2}}$$

Rozptyl

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 \, P(X = x_i)$$

$$DX = (0-2)^2 \cdot 0{,}1 + (1-2)^2 \cdot 0{,}2 + (2-2)^2 \cdot 0{,}3 + (3-2)^2 \cdot 0{,}4 =$$

$$= 4 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = \underline{\underline{1}}$$

Př. Na lodi jsou dvě čerpadla. První v čase t pracuje s pravděpodobností 0,8 a druhé, nezávisle na prvním, s pravděpodobností 0,9. Náhodná veličina X udává počet pracujících čerpadel v čase t.

a) Určete pravděpodobnostní funkci NV X.

X může nabývat hodnot $x_i \in \{0,1,2\}$

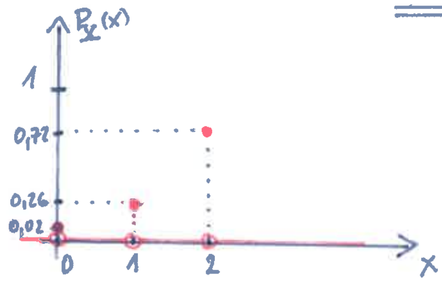
jev A … 1. čerpadlo v čase t pracuje
jev B … 2. čerpadlo v čase t pracuje } jevy jsou nezávislé

$$P_X(0) = P(X=0) = P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \big(\underbrace{P(A)}_{0,8} + \underbrace{P(B)}_{0,9} - \underbrace{P(A\cap B)}_{0,72 \,=\, P(A)\cdot P(B)}\big) = \underline{\underline{0,02}}$$

$$P_X(1) = P(X=1) = P(A\cap\bar{B}) + P(B\cap\bar{A}) = P(A\cup B) - P(A\cap B) = 0,8 + 0,9 - 0,72 - 0,72 = \underline{\underline{0,26}}$$

$$P_X(2) = P(X=2) = P(A\cap B) = 0,8\cdot 0,9 = \underline{\underline{0,72}}$$

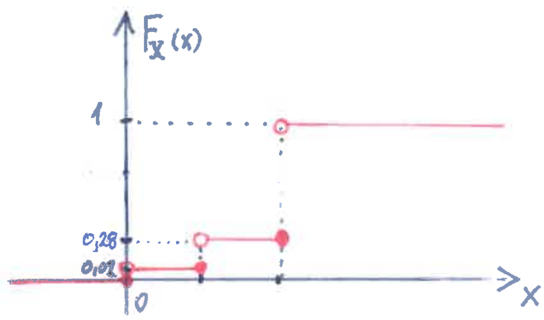
$$P_X(x) = \underline{\underline{0}} \quad \text{pro } x \notin \{0,1,2\}$$



Modus NV X = hodnota s nejvyšší pravděpodobností => modus X = 2

b) Určete distribuční funkci NV X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle = P(X<0) \\ 0,02 & \text{pro } x \in (0,1\rangle = P(X=0) \\ 0,28 & \text{pro } x \in (1,2\rangle = P(X=0)+P(X=1) \\ 1 & \text{pro } x \in (2,\infty) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \end{cases}$$



c) Určete $EX = 0\cdot 0,02 + 1\cdot 0,26 + 2\cdot 0,72 = \underline{\underline{1,7}}$

d) Určete $EX^2 = 0^2\cdot 0,02 + 1^2\cdot 0,26 + 2^2\cdot 0,72 = \underline{\underline{3,14}}$

e) Určete $\underbrace{DX}_{\text{rozptyl}} = EX^2 - (EX)^2 = 3,14 - 1,7^2 = \underline{\underline{0,25}}$ => $\underbrace{\sigma_X}_{\text{směrodatná odchylka}} = 0,5$

f) První čerpadlo odsává vodu z lodi rychlostí 300 l/s a druhé také rychlostí 300 l/s. Do lodi přitéká voda rychlostí 550 l/s. Náhodná veličina Y vyjadřuje množství (v. l/s) vody přitékající do lodi.

I) Určete pravděpodobnostní funkci NV Y.

$$Y = \underbrace{550}_{\text{přiteče za 1 s}} - \underbrace{300X}_{\text{odteče za 1 s}}$$

$$P_Y(y) = P(Y=y) = P(550-300X = y) = P\left(X = \frac{y-550}{-300}\right) = P_X\left(\frac{y-550}{300}\right)$$

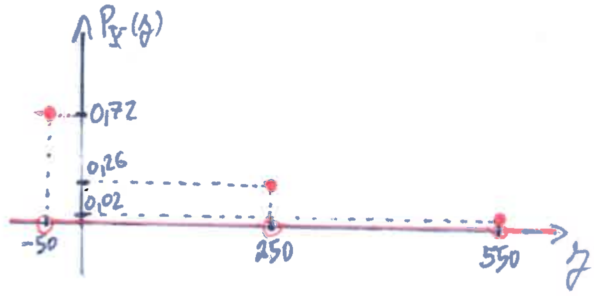
jinak: $X=0 \Leftrightarrow Y=550$; $X=1 \Leftrightarrow Y=250$; $X=2 \Leftrightarrow Y=-50$ $\Rightarrow$

$P_Y(550) = P(X=0) = 0{,}02$

$P_Y(250) = P(X=1) = 0{,}26$

$P_Y(-50) = P(X=2) = 0{,}72$

$P_Y(y) = 0$ pro $y \notin \{550, 250, -50\}$

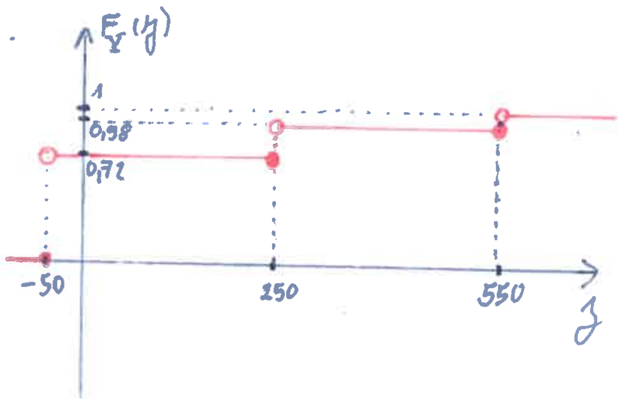


Pravděpodobnost, že v čase t více vody přitéká než odtéká je P(Y>0) = 0,02+0,26 = 0,28

Modus NV Y = hodnota s nejvyšší pravděpodobností => modus Y = -50

II.) Určete distribuční funkci NV Y.

$$F_Y(y) = P(Y<y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y \in (-\infty, -50\rangle \\ 0{,}72 & \text{pro } y \in (-50, 250\rangle \\ 0{,}98 & \text{pro } y \in (250, 550\rangle \\ 1 & \text{pro } y \in (550, \infty) \end{cases}$$



g) Určete střední hodnotu NV Y $\quad Y = a \cdot X + b \Rightarrow$

$$EY = \sum_{y_i} y_i \, P(Y = y_i) = \sum_{x_i} (a x_i + b)\, P(X = x_i) = a \underbrace{\sum_{x_i} x_i \, P(X = x_i)}_{EX} + b \cdot \underbrace{\sum_{x_i} P(X = x_i)}_{= 1} \Rightarrow$$

$$EY = a \cdot EX + b$$

$$\Rightarrow EY = -300 \cdot 1{,}7 + 550 = \underline{\underline{40 \ \ell \cdot s^{-1}}}$$

h) Určete rozptyl NV Y

$$DY = \sum_{y_i} (y_i - EY)^2 \cdot P(Y = y_i) = \sum_{x_i} (a x_i + b - (a EX + b))^2 P(X = x_i) = \sum_{x_i} (a x_i - a EX)^2 P(X = x_i) =$$

$$= a^2 \sum (x_i - EX)^2 P(X = x_i) \Rightarrow$$

$$DY = a^2 DX$$

$$DY = (-300)^2 \cdot 0{,}25 = \underline{\underline{22\,500 \ (\ell \cdot s^{-1})^2}}$$

ch) Určete směrodatnou odchylku NV Y.

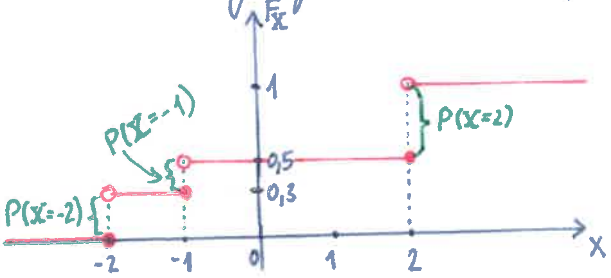
$$\sigma_Y = \sqrt{DY} = \sqrt{300^2 \cdot 0{,}25} = 300 \cdot 0{,}5 = \underline{\underline{150 \ \ell \cdot s^{-1}}}$$

Př: Distribuční funkce náhodné veličiny X je dána předpisem:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, -2\rangle \\ 0{,}3 & \text{pro } x \in (-2, -1\rangle \\ 0{,}5 & \text{pro } x \in (-1, 2\rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (2, \infty) \end{cases} \Rightarrow$$

X nabývá s nenulovou pravděpodobností hodnot $x \in \{-2, -1, 2\}$

a) Načrtněte graf F_X a určete předpis pravděpodobnostní funkce $P_X(x)$



$$\Rightarrow P_X(x) = \begin{cases} 0{,}3 & \text{pro } x = -2 \\ 0{,}2 & \text{pro } x = -1 \\ 0{,}5 & \text{pro } x = 2 \\ 0 & \text{pro } x \notin \{-2, 1, 2\} \end{cases}$$

b) Určete střední hodnotu náhodné veličiny X

$$EX = 0{,}3 \cdot (-2) + 0{,}2(-1) + 0{,}5 \cdot 2 = -0{,}6 - 0{,}2 + 1 = \underline{\underline{0{,}2}}$$

c) Určete pravděpodobnostní funkci náh. vel. $Y = X^2$

$X = -2 \Rightarrow Y = 4$

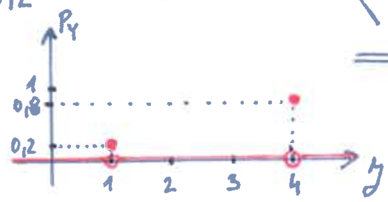
$X = 2 \Rightarrow Y = 4$

$X = -1 \Rightarrow Y = 1$

$P_Y(4) = P(Y=4) = P(X=2) + P(X=-2) = 0{,}8$

$P(1) = P(Y=1) = P(X=-1) = 0{,}2$

$$\Rightarrow P_Y(y) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{pro } y = 1 \\ 0{,}8 & \text{pro } y = 4 \\ 0 & \text{pro } y \notin \{1, 4\} \end{cases}$$



d) Určete $EY = EX^2$

$$EY = EX^2 = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 4 = 0{,}2 + 3{,}2 = \underline{\underline{3{,}4}}$$

e) Určete rozptyl náhodné veličiny X.

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 3{,}4 - 0{,}2^2 = 3{,}4 - 0{,}04 = \underline{\underline{3{,}36}}$$

e) Určete modus náhodné veličiny X.

$\underline{\underline{\hat{x} = 2}}$ (protože X nabývá s největší pravděpodobností hodnoty 2)

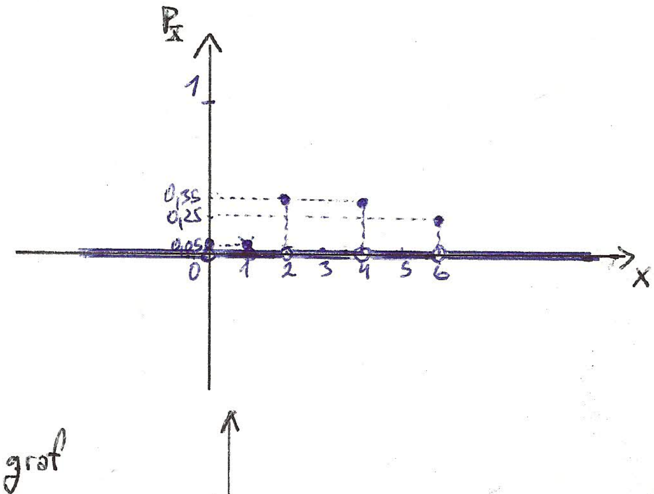
Př: Předpokládejme, že hmotnost prázdného výtahu je 250 kg. Do výtahu se nakládají součástky o hmotnosti 20 kg. Pravděpodobnosti, že do výtahu je naloženo X součástek jsou v tabulce:

x	0	2	4	6
$P(X=x)$	0,05	0,35	0,35	0,25

a) Určete pravděpodobnostní funkci P_X a načrtněte její graf.
b) Určete distribuční funkci F_X a načrtněte její graf.
c) Určete EX (střední hodnotu NV X)
d) Určete DX (rozptyl NV X)
e) Určete $\hat{x}$ (modus NV X)
f) Určete $P(1 < X \leq 5)$
g) Označme Y... celková hmotnost výtahu i s nákladem v kg.
h) Proveďte a) – e) pro NV Y
i) Určete pravděpodobnost $P(300 < Y < 400)$

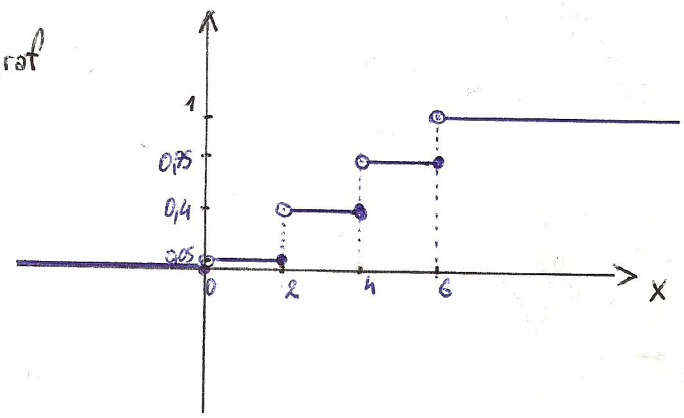
ad a) Určete pravděpodobnostní funkci P_X a načrtněte její graf.

$$P_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} P_X(0) = 0{,}05 \\ P_X(2) = 0{,}35 \\ P_X(4) = 0{,}35 \\ P_X(6) = 0{,}25 \\ P_X(x) = 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R} - \{0,2,4,6\} \end{cases}$$



ad b) Určete distribuční funkci F_X a načrtněte její graf

$$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, \text{ pro } x \in (-\infty, 0\rangle \\ 0{,}05, \text{ pro } x \in (0, 2\rangle \\ 0{,}4, \text{ pro } x \in (2, 4\rangle \\ 0{,}75, \text{ pro } x \in (4, 6\rangle \\ 1, \text{ pro } x \in (6, \infty) \end{cases}$$



ad c) Určete EX (střední hodnota veličiny X).

$$EX = \sum_{\substack{i:\\ P(X=x_i)\neq 0}} x_i P(X=x_i) = 0\cdot 0{,}05 + 2\cdot 0{,}35 + 4\cdot 0{,}35 + 6\cdot 0{,}25 = 0{,}7 + 1{,}4 + 1{,}5 = \underline{\underline{3{,}6}}$$

ad d) Určete DX (rozptyl náhodné veličiny X)

$$DX = \sum_{\substack{i\\ P(X=x_i)\neq 0}} (x_i - EX)^2 P(X=x_i) = E(X^2) - (EX)^2 = (0-3{,}6)^2\cdot 0{,}05 + (2-3{,}6)^2\cdot 0{,}35 + (4-3{,}6)^2 0{,}35 +$$

$$+ (6-3{,}6) 0{,}25 = \underline{\underline{3{,}04}}$$

ad e) Určete modus $\hat{x}$ ..... $x_0 = \hat{x} \Leftrightarrow P(X=x_0) = \max_i \{P(X=x_i)\}$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} \underline{\underline{2}} \\ \underline{\underline{4}} \end{cases}$$

ad f) Určete $P(1 < X \leq 5)$

$$P(1 < X \leq 5) = P(X=2) + P(X=4) = 0{,}35 + 0{,}35 = \underline{\underline{0{,}7}}$$

ad g) Označme Y ... celková hmotnost výtahu v kg $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{Y = 20\cdot X + 250}}$$

1) $P_Y = ?$

$$P_Y(y) = P_Y(Y=y) = P_Y(20X + 250 = y) = P_X\left(X = \frac{y-250}{20}\right)$$

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0{,}05 & \text{pro } y = 250 \\ 0{,}35 & \text{pro } y = 290 \\ 0{,}35 & \text{pro } y = 330 \\ 0{,}25 & \text{pro } y = 370 \\ 0 & \text{pro } y \in \mathbb{R} - \{250, 290, 330, 370\} \end{cases}$$

2) $F_Y(x) = ?$

$$F_Y(x) = P(Y < x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 250\rangle \\ 0{,}05 & \text{pro } x \in (250, 290\rangle \\ 0{,}4 & \text{pro } x \in (290, 330\rangle \\ 0{,}75 & \text{pro } x \in (330, 370\rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (370, \infty) \end{cases}$$

3.) Určete EY ; $EY = E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$

$$\sum_i y_i P(Y=y_i) = \sum_i (ax_i+b) P(X=x_i) = a \underbrace{\sum_i x_i P(X=x_i)}_{EX} + b \underbrace{\sum_i P(X=x_i)}_{1}$$

$$\Rightarrow \quad EY = E(20X+250) = 20 \cdot EX + 250 = 20 \cdot 3{,}6 + 250 = \underline{\underline{322}}\ kg$$

4.) Určete DY ; $DY = D(aX+b) = a^2 DX$

$$\sum_i (y_i - EY)^2 P(Y=y_i) = \sum_i (ax_i + b - aEX - b)^2 P(X=x_i) = a^2 \underbrace{\sum_i (x_i - EX)^2 P(X=x_i)}_{DX}$$

$$DY = D(20X+250) = 20^2 DX = 20^2 \cdot 3{,}04 = \underline{\underline{1216\ kg^2}}$$

$(\sigma_Y = \sqrt{DY} = 34{,}87\ kg)$

5.) Určete $\hat{y}$

$$\hat{y} = \begin{cases} \underline{\underline{290}}\ kg \\ \underline{\underline{330}}\ kg \end{cases}$$

6.) Určete $P(300 < Y < 400)$

$$P(300 < Y < 400) = P(Y=330) + P(Y=370) = 0{,}35 + 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}6}}$$