Př.: Vyřešte soustavu lineárních kongruencí

a)
$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 3 \pmod 7$$
$$x \equiv 1 \pmod 4$$

Vyřešíme kongruence:

1.) $\frac{3\cdot7\cdot4}{3} y_1 \equiv 2 \pmod 3$

$\overset{\equiv 1}{28} y_1 \equiv 2 \pmod 3$

$y_1 \equiv 2 \pmod 3$

$\Downarrow$

$y_1 = 2$

2.) $\frac{3\cdot7\cdot4}{7} \cdot y_2 \equiv 3 \pmod 7$

$12 y_2 \equiv 3 \pmod 7$

$5 y_2 \equiv 3 \pmod 7$

$\gcd(5,7) = 1$:

$7 = 1\cdot5 + 2$

$5 = 2\cdot2 + 1$

$2 = 2\cdot1 + 0$

$1 = 5 - 2\cdot2 = 5 - 2(7-5) =$

$1 = 3\cdot5 - 2\cdot7 \quad /\cdot 3$

$3 = 9\cdot5 - 6\cdot7 \quad /(\mathrm{mod}\ 7)$

$3 \equiv 5\cdot\underbrace{9}_{\equiv 2 \pmod 7} \pmod 7$

$y_2 = 2$

3.) $\frac{3\cdot7\cdot4}{4} \cdot y_3 \equiv 1 \pmod 4$

$21 y_3 \equiv 1 \pmod 4$

$y_3 \equiv 1 \pmod 4$

$\Downarrow$

$y_3 = 1$

$$\Rightarrow \quad x \equiv \frac{3\cdot7\cdot4}{3}\cdot2 + \frac{3\cdot7\cdot4}{7}\cdot2 + \frac{3\cdot7\cdot4}{4}\cdot1 \pmod{3\cdot7\cdot4}$$

$$x \equiv 28\cdot2 + 12\cdot2 + 21\cdot1 \pmod{84}$$

$$x \equiv 56 + 24 + 21 \pmod{84}$$

$$x \equiv 101 \pmod{84}$$

$$\underline{\underline{x \equiv 17 \pmod{84}}}$$

b) $X \equiv -1 \pmod 7$
$X \equiv 8 \pmod{13}$
$X \equiv 5 \pmod{18}$

Vyřešíme kongruence:

1.) $\frac{7\cdot13\cdot18}{7} y_1 \equiv -1 \pmod 7$

$\underbrace{13\cdot18}_{\substack{\equiv\\ 6\cdot4=24\\ \equiv}} \cdot y_1 \equiv -1 \pmod 7$

$3 y_1 \equiv -1 \pmod 7$

$y_1 \equiv 2 \pmod 7$

2.) $\frac{7\cdot13\cdot18}{13} y_2 \equiv 8 \pmod{13}$

$\underbrace{7\cdot18}_{\substack{\equiv\\ 7\cdot5=35\\ \equiv}} y_2 \equiv 8 \pmod{13}$

$-4 y_2 \equiv 8 \pmod{13}$

$y_2 \equiv -2 \pmod{13}$

3.) $\frac{7\cdot13\cdot18}{18} y_3 \equiv 5 \pmod{18}$

$\underset{\substack{\equiv\\ 7\cdot(-5)=-35\\ \equiv}}{7\cdot13}\, y_3 \equiv 5 \pmod{18}$

$1\cdot y_3 \equiv 5 \pmod{18}$

$y_3 \equiv 5 \pmod{18}$

$\Rightarrow X \equiv \frac{7\cdot13\cdot18}{7}\cdot2 + \frac{7\cdot13\cdot18}{13}(-2) + \frac{7\cdot13\cdot18}{18}\cdot5 \pmod{7\cdot13\cdot18}$

$X \equiv \underbrace{13\cdot18\cdot2 - 7\cdot18\cdot2}_{\downarrow} + 7\cdot13\cdot5 \pmod{1638}$

$X \equiv 6\cdot18\cdot2 + 91 \pmod{1638}$

$X \equiv 180+36+91\cdot5 \pmod{1638}$

$X \equiv 180+36+455 \pmod{1638}$

$\underline{\underline{X \equiv 671 \pmod{1638}}}$

Tzn. vyhovují všechna $x\in\mathbb{Z}$ ve tvaru $x = 671 + k\,1630$, kde $k\in\mathbb{Z}$.

Zkouška: $671 + k\cdot\overset{\text{,,}7\cdot13\cdot18}{1630} \equiv \overset{-630}{671} \pmod 7 \equiv 41 \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$

$671 + k\cdot7\cdot13\cdot18 \equiv \overset{-520}{671} \pmod{13} \equiv \overset{-130-13}{151} \pmod{13} \equiv 8 \pmod{13}$

$671 + k\cdot7\cdot13\cdot18 \equiv \overset{-720}{671} \pmod{18} \equiv \overset{+54}{-49} \pmod{18} \equiv 5 \pmod{18}$

Př: Vyřešte soustavu lineárních kongruencí

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 5 \pmod 7 \\ 4x &\equiv 2 \pmod 6 \\ 9x &\equiv 8 \pmod{11} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3x &\equiv 5 \pmod 7 \\ 2x &\equiv 1 \pmod 3 \\ 9x &\equiv 8 \pmod{11} \end{aligned}$$

a) $3x \equiv 5 \pmod 7$

$7 = 2\cdot 3 + 1 \Rightarrow 7 - 2\cdot 3 = 1 \quad / \cdot 5$

$3 = 3\cdot 1 + 0$

$7\cdot 5 - 10\cdot 3 = 5 \quad / \pmod 7$

$-10\cdot 3 \equiv 5 \pmod 7$

$\underline{x \equiv -10 \equiv 4 \pmod 7}$

b) $2x \equiv 1 \pmod 3$

$3 = 1\cdot 2 + 1$

$3 - 2 = 1 \quad / \cdot$

$3 + (-1)\cdot 2 = 1 \quad / \pmod 3$

$(-1)\cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$

$\underline{x \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3}$

c) $9x \equiv 8 \pmod{11}$

$11 = 1\cdot 9 + 2$

$9 = 4\cdot 2 + 1$

$1 = 9 - 4\cdot 2$

$1 = 9 - 4(11 - 9)$

$1 = 5\cdot 9 - 4\cdot 11 \quad / \cdot 8$

$8 = 40\cdot 9 - 32\cdot 11 \quad / \pmod{11}$

$8 \equiv 40\cdot 9 \pmod{11}$

$\underline{x \equiv 40 \equiv 7 \pmod{11}}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &\equiv 4 \pmod 7 \\ x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 7 \pmod{11} \end{aligned}$$

1.) $\frac{7\cdot 3\cdot 11}{7} y_1 \equiv 4 \pmod 7$

$33 y_1 \equiv 4 \pmod 7$

$5 y_1 \equiv 4 \pmod 7$

$\vdots$

$y_1 \equiv 5 \pmod 7$

2.) $\frac{7\cdot 3\cdot 11}{3} y_2 \equiv 2 \pmod 3$

$77 y_2 \equiv 2 \pmod 3$

$2 y_2 \equiv 2 \pmod 3$

$y_2 \equiv 1 \pmod 3$

3.) $\frac{7\cdot 3\cdot 11}{11} y_3 \equiv 7 \pmod{11}$

$21 y_3 \equiv 7 \pmod{11}$

$10 y_3 \equiv 7 \pmod{11}$

$\vdots$

$y_3 \equiv 4 \pmod{11}$

$$\Rightarrow \quad x \equiv \frac{7\cdot 3\cdot 11}{7}\cdot 5 + \frac{7\cdot 3\cdot 11}{3}\cdot 1 + \frac{7\cdot 3\cdot 11}{11}\cdot 4 \pmod{7\cdot 3\cdot 11}$$

$$\underline{\underline{x \equiv 326 \equiv 95 \pmod{231}}}$$

Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{Z}$ vyhovující soustavě lineárních kongruencí:

1.) $$\begin{aligned} x &\equiv \underbrace{14}_{=b_1} \pmod{\underbrace{15}_{=m_1}} \\ x &\equiv \underbrace{5}_{=b_2} \pmod{\underbrace{6}_{=m_2}} \end{aligned}$$

Nejprve určíme $d = \gcd(\overset{15}{m_1}, \overset{6}{m_2}) = c_1 m_1 - c_2 m_2$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 15 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-2r_2} \sim \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-2r_1} \sim \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow d = 3 = \underbrace{1}_{c_1} \cdot \underbrace{15}_{m_1} - 2 \cdot \underbrace{6}_{m_2}$$

$\Rightarrow$

$$x \equiv \underbrace{1}_{c_1} \cdot \underbrace{15}_{m_1} \cdot \underbrace{\frac{5-14}{3}}_{\frac{b_2-b_1}{d}} + \underbrace{14}_{b_1} \pmod{\frac{15 \cdot 6}{3}}$$

$$x \equiv 15 \cdot \frac{-9}{3} + 14 = -45 + 14 = -31 \equiv 29 \pmod{30}$$

2.) $$\begin{aligned} x &\equiv 17 \pmod{28} \\ x &\equiv 9 \pmod{20} \end{aligned}$$

$m_1 = 28$, $m_2 = 20$, $b_1 = 17$, $b_2 = 9$, $c_1 = ?$, $d = ?$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 28 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-r_2} \sim \left(\begin{array}{c|cc} 8 & 1 & -1 \\ 20 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-2r_1} \sim \left(\begin{array}{c|cc} 8 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{array}\right)^{-2r_2} \sim \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow d = 4 = \underbrace{-2}_{c_1} \cdot 28 + 3 \cdot 20$$

$\Rightarrow$

$$x \equiv -2 \cdot 28 \cdot \frac{9-17}{4} + 17 = -56 \cdot (-2) + 17 = 112 + 17 = 129 \pmod{\frac{20 \cdot 28}{4}}$$

$$x \equiv 129 \pmod{140}$$

Zk: Opravdu:
$$x = 129 + k \cdot 140 = 129 + k \cdot 5 \cdot 28 \equiv \overset{112}{\overbrace{4 \cdot 28}}\, 129 \pmod{28} \equiv 17 \pmod{28}$$
$$x = 129 + k \cdot 140 = 129 + k \cdot 7 \cdot 20 \equiv 129 \pmod{20} \equiv 9 \pmod{20}$$

3) $7x \equiv 3 \pmod{18}$

$3x \equiv 3 \pmod{24}$

Nejprve vyřešíme kongruence jednotlivě:

a) $7x \equiv 3 \pmod{18}$

$\left(\begin{array}{c|cc} 18 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2r_2} \sim \left(\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-r_1]{\sim} \left(\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-r_2} \sim \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$

$1 = 2 \cdot 18 - 5 \cdot 7$

$3 = 6 \cdot 18 - 15 \cdot 7$

$3 \equiv \underbrace{-15}_{\text{"}x \equiv 3\text{"}} \cdot 7 \pmod{18}$

$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod{18}$

b) $3x \equiv 3 \pmod{24}$ $\gcd(3, 24) = 3$

Tato kongruence je ekvivalentní s kongruencí:

$x \equiv 1 \pmod{8}$

$\Rightarrow$ Zadaná soustava má stejnou množinu řešení jako soustava:

$x \equiv 3 \pmod{18}$

$x \equiv 1 \pmod{8}$

$m_1 = 18,\ m_2 = 8,\ b_1 = 3,\ b_2 = 1,\ d = ?,\ c_1 = ?$

$\left(\begin{array}{c|cc} 18 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2r_2} \sim \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-4r_1]{\sim} \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow d = 2 = \overset{\text{"}c_1\text{"}}{1} \cdot \overset{\text{"}m_1\text{"}}{18} - 2 \cdot \overset{\text{"}m_2\text{"}}{8}$

$\Rightarrow x \equiv 1 \cdot 18 \cdot \frac{1-3}{2} + 3 = 18(-1) + 3 = -15 \pmod{\underbrace{\frac{18 \cdot 8}{2}}_{= 72}}$

$x \equiv 57 \pmod{72}$

Příklad: Vyřešte soustavu lineárních kongruencí:

$$x \equiv \underbrace{31}_{b_1} \pmod{\underbrace{42}_{m_1}}$$
$$x \equiv \underbrace{25}_{b_2} \pmod{\underbrace{39}_{m_2}}$$

Nejprve určíme gcd(42, 39):

$$\begin{cases} 42 = 1\cdot 39 + 3 \\ 39 = 13\cdot 3 + 0 \end{cases} \Rightarrow \quad d = 3 \mid (\underbrace{25-31}_{-6}) \Rightarrow \text{soustava má 3 řešení modulo } 42\cdot 39$$

Vyjádříme $d = \gcd(42, 39)$ ve tvaru $d = 42\,c_1 - 39\,c_2$:

$$d = 42\cdot 1 - 39\cdot 1$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{c_1 = 1}$$

Nalezneme nějaké řešení $x_0 \in \mathbb{Z}$ kongruence:

$$\underbrace{3}_{d}x \equiv \underbrace{25-31}_{b_2-b_1} \left(\text{mod } \frac{42\cdot 39}{3}\right)$$

$$3x \equiv -6 \left(\text{mod } \frac{42\cdot 39}{3}\right) \quad \Big| \text{ tam má řešení neboť } 3 \mid -6$$

$$\Updownarrow$$

$$x \equiv -2 \left(\text{mod } \frac{42\cdot 39}{3\cdot 3}\right)$$

$$\Downarrow$$

Řešením je například $x_0 = -2$

Označme $x = m_1 c_1 x_0 + b_1 = 42\cdot 1\cdot(-2) + 31 = -84 + 31 = -53$.

$\Rightarrow$ x vyhovuje zadaným kongruencím $\Leftrightarrow$ $x \in \overline{-53}_{\frac{42\cdot 39}{3}} = \overline{-53}_{546}$

$\Leftrightarrow$ $x \in \overline{-53}_{\underbrace{42\cdot 39}_{1638}} \cup \overline{-53+546}_{1638} \cup \overline{-53+2\cdot 546}_{1638} = \underline{\underline{\overline{-53}_{1638} \cup \overline{493}_{1638} \cup \overline{1039}_{1638}}}$

Př Vyřešte soustavu lineárních kongruencí:

$$13X \equiv 8 \pmod{27}$$
$$11X \equiv 1 \pmod{30}$$

Nejprve vyřešíme každou kongruenci zvlášť:

a) $13X \equiv 8 \pmod{27}$

$27 = 2\cdot 13 + 1 = \gcd(13,27)$
$13 = 13\cdot 1 + 0$
$\Rightarrow 27 - 2\cdot 13 = 1 \quad /\cdot 8$
$8\cdot 27 - 16\cdot 13 \equiv 8 \pmod{27} \Rightarrow X \equiv -16 \equiv 11 \pmod{27}$

b) $11X \equiv 1 \pmod{30}$

$30 = 2\cdot 11 + 8$
$11 = 1\cdot 8 + 3$
$8 = 2\cdot 3 + 2$
$3 = 1\cdot 2 + 1 = \gcd(30,11) \Rightarrow$

$1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 2\cdot 3)$
$= -1\cdot 8 + 3\cdot 3 = -1\cdot 8 + 3(11-8) =$
$= 3\cdot 11 - 4\cdot 8 = 3\cdot 11 - 4(30 - 2\cdot 11)$
$= -4\cdot 30 + 11\cdot 11 \equiv 1 \pmod{30} \Rightarrow X \equiv 11 \pmod{30}$

$\Rightarrow$ Zadaná soustava je ekvivalentní se soustavou:

$$X \equiv \overset{b_1}{11} \pmod{\overset{m_1}{27}}$$
$$X \equiv \underset{b_2}{11} \pmod{\underset{m_2}{30}}$$

Určíme $d = \gcd(m_1, m_2)$:

$30 = 1\cdot 27 + 3$
$27 = 9\cdot 3 + 0$

$3 \mid (11-11) \Rightarrow$ řeš. existuje $\Rightarrow 3 = \underset{c_1}{-1}\cdot\underset{m_1}{27} + \underset{c_2}{1}\cdot\underset{m_2}{30}$

Vyřešíme kongruenci $dx \equiv b_2 - b_1 \pmod{\frac{m_1 m_2}{d}}$:

$$3x \equiv 0 \pmod{\tfrac{27\cdot 30}{3}}$$
$$x \equiv 0 \pmod{270} \Rightarrow x_0 = 0$$

Řešením je zbytková třída $\overline{c_1 m_1 x_0 + b_1}_{\frac{m_1 m_2}{d}}$:

$$X \in \overline{-1\cdot 27\cdot 0 + 11}_{270} = \overline{11}_{270} = \overline{11}_{810} \cup \overline{281}_{810} \cup \overline{551}_{810}$$

Tzn. vyhovují $x = 11 + k\cdot 270$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Zk: $13x = 13\cdot 11 + k\cdot 13\cdot 27\cdot 10 \equiv 13\cdot 11 \pmod{27} \equiv \underbrace{143}_{5\cdot 27+8} \pmod{27} \equiv 8 \pmod{27}$

$11X = 11\cdot 11 + k\cdot 11\cdot 30\cdot 9 \equiv 11\cdot 11 \pmod{30} \equiv 121 \pmod{30} \equiv 1 \pmod{30}$

Příklad: Vyřešte soustavu lineárních kongruencí:

$$\begin{aligned} x &\equiv 14 \pmod{18} \\ x &\equiv 6 \pmod{14} \\ x &\equiv 1 \pmod{25} \\ x &\equiv 3 \pmod{11} \end{aligned} \qquad (1)$$

Čísla 18 a 14 jsou soudělná proto vyřešíme nejprve soustavu

$$\begin{aligned} x &\equiv \overbrace{14}^{b_1} \pmod{\overbrace{18}^{m_1}} \\ x &\equiv \underbrace{6}_{b_2} \pmod{\underbrace{14}_{m_2}} \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} 18 &= 1 \cdot 14 + 4 \\ 14 &= 3 \cdot 4 + 2 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned} \qquad 2 = \gcd(18, 14) \quad / \, 6 - 14$$

$\Rightarrow$ soustava má dvě řešení modulo $18 \cdot 14$, ale jedno modulo $\frac{18 \cdot 14}{2}$ – to použijeme

Vyjádříme $d = 2 = 14 - 3 \cdot 4 = 14 - 3(18 - 14) = 4 \cdot 14 \underbrace{-3}_{c_1} \cdot \underbrace{18}_{m_1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{c_1 = -3}$

Nalezneme nějaké řešení x_0 kongruence: $\overset{d}{2} x \equiv \overbrace{6 - 14}^{b_2 - b_1} \left(\bmod \frac{18 \cdot 14}{2}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$x \equiv \underbrace{\frac{6-14}{2}}_{x_0} \left(\bmod \frac{18 \cdot 14}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = m_1 c_1 x_0 + b_1 = 18 \cdot (-3) \frac{6-14}{2} + 14 = 18 \cdot 12 + 14 = 216 + 14 = \underline{230}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &\equiv 14 \pmod{18} \\ x &\equiv 6 \pmod{14} \end{aligned} \Leftrightarrow x \equiv 230 \left(\bmod \underbrace{\frac{18 \cdot 14}{2}}_{126}\right) \Leftrightarrow x \equiv -22 \pmod{126}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Zadaná soustava (1) je ekvivalentní se soustavou:

$$
\begin{aligned}
X &\equiv -22 \ (\text{mod } \underset{9\cdot 14}{126}) \\
X &\equiv 1 \ (\text{mod } 25) \qquad (3) \\
X &\equiv 3 \ (\text{mod } 11)
\end{aligned}
$$

Čísla 126, 25 a 11 jsou navzájem nesoudělná. Můžeme proto použít čínskou zbytkovou větu. Řešíme proto kongruence:

a) $\underbrace{25.11}_{275} y_1 \equiv -22 \ (\text{mod } 126) \iff 23 y_1 \equiv -22 \ (\text{mod } 126)$

$$
\begin{aligned}
126 &= 5\cdot 23 + 11 \\
23 &= 2\cdot 11 + 1 = \gcd(23, 126) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{1 = 23 - 2\cdot 11 = 23 - 2(126 - 5\cdot 23) = 11\cdot 23 - 2\cdot 126}$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
-22 &= (-22)\cdot 11\cdot 23 + (-22)(-2)\cdot 126 \\
-22 &\equiv (-22\cdot 11)\cdot 23 \ (\text{mod } 126) \\
-22 &\equiv (\underset{+2\cdot 126 = 252}{-242})\cdot 23 \ (\text{mod } 126) \\
-22 &\equiv \underset{y_1}{\underset{\parallel}{10}} \cdot 23 \ (\text{mod } 126)
\end{aligned}
$$

b) $\underset{\overset{\equiv}{1}}{126}\cdot 11\, y_2 \equiv 1 \ (\text{mod } 25) \iff 11 y_2 \equiv 1 \ (\text{mod } 25)$

$$
\begin{aligned}
25 &= 2\cdot 11 + 3 \\
11 &= 3\cdot 3 + 2 \\
3 &= 1\cdot 2 + 1 = \gcd(11, 25) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{1 = 3 - 2 = 3 - (11 - 3\cdot 3) = 4.3 - 11 = 4(25 - 2\cdot 11) - 11 = 4.25 - 9.11}$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv 4.25 - 9.11 \ (\text{mod } 25) \\
1 &\equiv \underset{y_2}{\underset{\parallel}{-9}} \cdot 11 \ (\text{mod } 25)
\end{aligned}
$$

c) $\underbrace{\underbrace{126}_{\equiv 5} \cdot \underbrace{25}_{\equiv 3}}_{\equiv 4} y_3 \equiv 3 \pmod{11} \iff 4y_3 \equiv 3 \pmod{11}$

$11 = 2 \cdot 4 + 3$

$4 = 1 \cdot 3 + 1 = \gcd(4, 11) \Rightarrow$

$1 = 4 - 3 = 4 - (11 - 2 \cdot 4) =$

$= -11 + 3 \cdot 4$

$3 = (-3) \cdot 11 + 9 \cdot 4$

$3 \equiv 9 \cdot 4 \pmod{11}$

$9 = y_3$

$\Rightarrow$ X je řešením (3), a tedy i (1) $\iff$

$$X \equiv 25 \cdot 11 \cdot 10 + 126 \cdot 11 (-9) + 126 \cdot 25 \cdot 9 \pmod{126 \cdot 25 \cdot 11}$$

$$X \equiv 18626 \pmod{34\,650}$$