Dirichletův součin

Def: Nechť f a g jsou aritmetické funkce ($f,g: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Dirichletovým součinem funkcí f a g nazveme funkci h:

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Značíme $h = f * g$.

Př: 1.) Uvažujme funkce $f(n) = n$ ($\underbrace{f \dots \text{identita}}_{\text{budeme tuto funkci značit } N}$) a $g(n) = \varphi(n)$ ($g \dots$ Eulerova funkce)

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} \overset{f(d)}{d} \cdot \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\Rightarrow (f*g)(1) = \sum_{d|1} d \cdot \varphi\left(\frac{1}{d}\right) = 1 \cdot \varphi\left(\frac{1}{1}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(f*g)(2) = \sum_{d|2} d \cdot \varphi\left(\frac{2}{d}\right) = 1 \cdot \varphi\left(\frac{2}{1}\right) + 2 \cdot \varphi\left(\frac{2}{2}\right) = 1 \cdot \overset{1}{\widetilde{\varphi(2)}} + 2 \cdot \overset{1}{\widetilde{\varphi(1)}} = 3$$

$$(f*g)(6) = \sum_{d|6} d \cdot \varphi\left(\frac{6}{d}\right) = 1 \cdot \overset{2}{\widetilde{\varphi(6)}} + 2 \cdot \overset{2}{\widetilde{\varphi(3)}} + 3 \cdot \overset{1}{\widetilde{\varphi(2)}} + 6 \cdot \overset{1}{\widetilde{\varphi(1)}} = 2 + 4 + 3 + 6 = 15$$

$$(f*g)(10) = \sum_{d|10} d\, \varphi\left(\frac{10}{d}\right) = 1 \cdot \varphi(10) + 2 \cdot \varphi(5) + 5 \cdot \varphi(2) + 10\, \varphi(1) = 4 + 8 + 5 + 10 = 27$$

Poznámka: Všimněme si, že:

$$\sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{a \cdot b = n} f(a)\, g(b)$$

sčítáme přes všechny dvojice a, b splňující $a \cdot b = n$

$\Rightarrow$ Dirichletův součin je komutativní ($f*g = g*f$) $\Rightarrow$

$$\sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right)$$

Př: Uvažujme funkce: φ... Eulerova funkce; $u(n)=1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$,
$N(n)=n \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad \sum_{d|n}\varphi(d)=n \qquad (1)\text{... dokázáno dříve}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{d|n}\varphi(d)\cdot 1=\underbrace{\sum_{d|n}\varphi(d)\cdot u\left(\tfrac{n}{d}\right)}_{(\varphi * u)(n)}=N(n)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi * u = N$$ .... zápis vztahu (1) pomocí Dirichletova součinu

Př: Uvažujme funkce: μ... Möbiova funkce; N... $\forall n\in\mathbb{N}: N(n)=n$

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\varphi(n) \qquad (2)\text{... dokázáno dříve}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{d|n}\mu(d)\,N\left(\tfrac{n}{d}\right)}_{(\mu * N)(n)}=\varphi(n)$$

$$\Rightarrow \quad \mu * N = \varphi$$ ... zápis vztahu (2) pomocí Dirichletova součinu

Př: Uvažujme funkce μ... Möbiova funkce; $\forall n\in\mathbb{N}: I(n)=\left[\frac{1}{n}\right]$, $u(n)=1$

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad \sum_{d|n}\mu(d)=I(n) \qquad (3)\text{... dokázáno dříve}$$

$$\underbrace{\sum_{d|n}\mu(d)\,\overbrace{u\left(\tfrac{n}{d}\right)}^{=1}}_{(\mu * u)(n)}=I(n)$$

$$\Rightarrow \quad \mu * u = I$$ ... zápis vztahu (3) pomocí dirichletova součinu

(důležité v důkazu Möbiovy inverzní formule!)

Def. (Identita vzhledem k Dirichl. součinu): Identitou vzhledem k Dirichletovu součinu nazveme funkci $I: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ danou $\forall n \in \mathbb{N}$ předpisem:

$$I(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 0 & \text{pro } n > 1 \end{cases}$$

Věta: Pro každou aritmetickou funkci $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ platí:

$$I * f = f * I = f$$

Důkaz: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) \underbrace{I\left(\tfrac{n}{d}\right)}_{=0 \text{ pro } \frac{n}{d} \neq 1} = f(n) \cdot \underbrace{I\left(\tfrac{n}{n}\right)}_{I(1)=1} = f(n)$$

$$\Rightarrow f * I = f$$

$$(I * f)(n) = \sum_{d|n} \underbrace{I(d)}_{=0 \text{ pro } d \neq 1} f\left(\tfrac{n}{d}\right) = \underbrace{I(1)}_{1} \cdot f\left(\tfrac{n}{1}\right) = f(n)$$

(Nebo jsme mohli využít toho, že Dirichletův součin je komutativní.)

Věta: Dirichletův součin je asociativní. To jest, pro libovolné aritmetické funkce f, g, h platí:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

Důkaz: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{c|d} f(c) g\Big(\underbrace{\tfrac{d}{c}}_{b}\Big) = \sum_{c \cdot b = d} f(c) g(b)$$

$$((f * g) * h)(n) = \sum_{d|n} (f * g)(d)\, h\Big(\underbrace{\tfrac{n}{d}}_{a}\Big) = \sum_{a \cdot d = n} (f * g)(d)\, h(a) =$$

$$= \sum_{a \cdot d = n} h(a) \sum_{c \cdot b = d} f(c) g(b) = \sum_{a \cdot c \cdot b = n} h(a) f(c) g(b)$$

$$(f * (g * h))(n) = \sum_{c \cdot d = n} f(c)\, (g * h)(d) = \sum_{c \cdot d = n} f(c) \sum_{a \cdot b = d} g(b) h(a) = \sum_{c \cdot a \cdot b = n} f(c) g(b) h(a)$$

Věta (Dirichletova inverze): Nechť f je aritmetická funkce, kde $f(1) \neq 0$. Potom existuje právě jedna aritmetická funkce f^{-1} splňující $f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$.
Tato funkce splňuje:

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} \quad \text{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1: \; f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

Důkaz: Připomeňme, že $I(n) = 0$ pro $n > 1$ a $I(1) = 1$.

a) $n = 1$ $\Rightarrow$ f^{-1} musí splňovat: $(f^{-1} * f)(1) = I(1) = 1$

$$\sum_{d \mid 1} f^{-1}(d) f\left(\frac{1}{d}\right) = 1$$

$$f^{-1}(1) \cdot f(1) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

b) $n > 1$ $\Rightarrow$ Předpokládáme, že $f^{-1}(k)$ pro $k < n$ známe (a je jednoznačně určeno). Potom $f^{-1}(n)$ musí splňovat (a bude tak také jednoznačně určeno):

$$(f^{-1} * f)(n) = I(n) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{d \mid n} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

$$\underbrace{f^{-1}(n) \cdot f\left(\frac{n}{n}\right)}_{d = n} + \sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

$$f^{-1}(n) \cdot f(1) = - \sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

$\square$

Důsledek: Označme $A = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid f(1) \neq 0 \}$ ... množina aritmetických funkcí splňujících $f(1) \neq 0$ a Dirichletův součin symbolem $*$. Potom

$(A, *)$ je grupa (komutativní)

1.) $\forall f, g \in A : \quad (f * g)(1) = \sum_{d \mid 1} f(d)\, g\left(\frac{1}{d}\right) = \underbrace{f(1)}_{\neq 0}\underbrace{g(1)}_{\neq 0} \neq 0$

$\Rightarrow f * g \in A$ (UZAVŘENOST)

2.) $\forall f, g, h \in A : \quad f * (g * h) = (f * g) * h$ (ASOCIATIVITA)

3.) $\exists I \in A \; \forall f \in A : \quad I * f = f * I = f$ ($\exists$ NEUTR. PRVEK)

4.) $\forall f \in A \; \exists f^{-1} \in A : \quad f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$ ($\exists$ INVERZ. PRVKŮ)

$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} \neq 0 \Rightarrow f^{-1} \in A$

5.) $\forall f, g \in A : \quad f * g = g * f$ (KOMUTATIVITA)

Př: Určete $\mu^{-1}(n)$ pro $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Připomeňme, že μ je Möbiova funkce: $\mu(1)=1$; $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow$ $\mu(n) = (-1)^k$ když $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 1$ a $\mu(n) = 0$ když $\exists \alpha_i > 1$.

$$\mu^{-1}(1) = \frac{1}{\mu(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\mu^{-1}(2) = \frac{-1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d \mid 2 \\ d \neq 2}} \mu^{-1}(d)\,\mu\left(\frac{2}{d}\right) = -1 \cdot \mu^{-1}(1)\,\overbrace{\mu(2)}^{(-1)^1} = -1 \cdot 1 \cdot (-1) = 1$$

$$\mu^{-1}(3) = \frac{-1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d \mid 3 \\ d \neq 3}} \mu^{-1}(d)\,\mu\left(\frac{3}{d}\right) = -1 \cdot \mu^{-1}(1)\,\mu(3) = -1 \cdot 1 \cdot (-1) = 1$$

$$\mu^{-1}(4) = \frac{-1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d \mid 4 \\ d \neq 4}} \mu^{-1}(d)\,\mu\left(\frac{4}{d}\right) = -1\left(\overbrace{\mu^{-1}(1)}^{=1}\,\overbrace{\mu(4)}^{=0} + \overbrace{\mu^{-1}(2)}^{=1}\,\overbrace{\mu(2)}^{=(-1)^1}\right) = 1$$

$$\mu^{-1}(5) = \frac{-1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d \mid 5 \\ d \neq 5}} \mu^{-1}(d)\,\mu\left(\frac{5}{d}\right) = -1 \cdot \mu^{-1}(1)\,\mu(5) = -1 \cdot 1 \cdot (-1) = 1$$

$$\mu^{-1}(6) = \frac{-1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d \mid 6 \\ d \neq 6}} \mu^{-1}(d)\,\mu\left(\frac{6}{d}\right) = -1 \cdot \left(\mu^{-1}(1)\,\overbrace{\mu(6)}^{=(-1)^2} + \mu^{-1}(2)\,\overbrace{\mu(3)}^{=(-1)^1} + \mu^{-1}(3)\,\overbrace{\mu(2)}^{=(-1)^1}\right) = 1$$

Poznámka: Jak bylo dokázáno dříve, $\mu * u = I$, kde $\forall n \in \mathbb{N}$: $u(n) = 1$. Z toho plyne, že $\mu^{-1} = u \Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mu^{-1}(n) = 1$$

Př. Určete $\varphi^{-1}(n)$ pro $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$

n	1	2	3	4	5	6
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2
$\varphi^{-1}(n)$	1	−1	−2	−1	−4	2

$$\varphi^{-1}(1) = \frac{1}{\varphi(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi^{-1}(2) = \frac{-1}{\varphi(1)} \sum_{\substack{d|2 \\ d\neq 2}} \varphi^{-1}(d)\,\varphi\left(\frac{2}{d}\right) = -1\cdot\varphi^{-1}(1)\cdot\varphi(2) = -1\cdot 1\cdot 1 = -1$$

p ... prvočíslo $\Rightarrow \varphi(p) = p-1 \Rightarrow$

$\varphi^{-1}(1)\varphi(p) + \varphi^{-1}(p)\varphi(1) = 0 \Rightarrow$

$1\cdot(p-1) + \varphi^{-1}(p)\cdot 1 = 0$

$\varphi^{-1}(p) = 1-p = -\varphi(p)$

$$\varphi^{-1}(3) = \frac{-1}{\varphi(1)} \sum_{\substack{d|3 \\ d\neq 3}} \varphi^{-1}(d)\,\varphi\left(\frac{3}{d}\right) = -1\cdot\varphi^{-1}(1)\,\varphi(3) = -2$$

$$\varphi^{-1}(4) = \frac{-1}{\varphi(1)} \sum_{\substack{d|4 \\ d\neq 4}} \varphi^{-1}(d)\,\varphi\left(\frac{4}{d}\right) = -1\cdot\left(\underbrace{\varphi^{-1}(1)}_{1}\underbrace{\varphi(4)}_{2} + \underbrace{\varphi^{-1}(2)}_{-1}\underbrace{\varphi(2)}_{1}\right) = -1$$

$$\varphi^{-1}(5) = \frac{-1}{\varphi(1)} \sum_{\substack{d|5 \\ d\neq 5}} \varphi^{-1}(d)\,\varphi\left(\frac{5}{d}\right) = -1\cdot\varphi^{-1}(1)\,\varphi(5) = -4$$

$$\varphi^{-1}(6) = \frac{-1}{\varphi(1)} \sum \varphi^{-1}(d)\,\varphi\left(\frac{6}{d}\right) = -1\cdot\left(\overset{1}{\varphi^{-1}(1)}\overset{2}{\varphi(6)} + \overset{-1}{\varphi^{-1}(2)}\overset{2}{\varphi(3)} + \overset{-2}{\varphi^{-1}(3)}\overset{1}{\varphi(2)}\right) = 2$$

Př. Doplňte tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$N(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$N^{-1}(n)$	1	−2	−3	0	−5	6	−7	0

$N^{-1}(1)\cdot N(1) = 1 \Rightarrow N^{-1}(1)\cdot 1 = 1 \Rightarrow N^{-1}(1) = 1$

$\underbrace{N^{-1}(1)}_{=1}\underbrace{N(2)}_{=2} + N^{-1}(2)\underbrace{N(1)}_{=1} = 0 \Rightarrow 2 + N^{-1}(2) = 0 \Rightarrow N^{-1}(2) = -2$

$N^{-1}(1)N(3) + N^{-1}(3)N(1) = 0 \Rightarrow 3 + N^{-1}(3) = 0 \Rightarrow N^{-1}(3) = -3$

$\overset{1}{N^{-1}(1)}\overset{4}{N(4)} + \overset{-2}{N^{-1}(2)}\overset{2}{N(2)} + N^{-1}(4)\overset{1}{N(1)} = 0 \Rightarrow 0 + N^{-1}(4) = 0 \Rightarrow N^{-1}(4) = 0$

$N^{-1}(1)N(5) + N^{-1}(5)N(1) = 0 \Rightarrow 5 + N^{-1}(5) = 0 \Rightarrow N^{-1}(5) = -5$

$N^{-1}(1)N(6) + N^{-1}(2)N(3) + N^{-1}(3)N(2) + N^{-1}(6)N(1) = 0 \Rightarrow 1\cdot 6 - 2\cdot 3 - 3\cdot 2 + N^{-1}(6) = 0 \Rightarrow N^{-1}(6) = 6$

$N^{-1}(1)N(7) + N^{-1}(7)N(1) = 0 \Rightarrow 7 + N^{-1}(7) = 0 \Rightarrow N^{-1}(7) = -7$

$N^{-1}(1)N(8) + N^{-1}(2)N(4) + N^{-1}(4)N(2) + N^{-1}(8)N(1) = 0 \Rightarrow 1\cdot 8 - 2\cdot 4 + 0\cdot 2 + N^{-1}(8)\cdot 1 = 0 \Rightarrow N^{-1}(8) = 0$

Věta (Möbiova inverzní formule): Platí:

$$\underbrace{f(n) = \sum_{d|n} g(d)}_{f = g * u} \iff \underbrace{g(n) = \sum_{d|n} f(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)}_{g = f * \mu}$$

Důkaz:

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}: f(n) = \sum_{d|n} g(d) \cdot 1 \Rightarrow f = g * u \Rightarrow f * \mu = g * \overbrace{u * \mu}^{I} \Rightarrow f * \mu = g$

I … neutr. prvek vzhledem k Dirichl. součinu

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}: g(n) = \sum_{d|n} f(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right) \Rightarrow g = f * \mu \Rightarrow g * u = f * \overbrace{\mu * u}^{I} = f$

(u je funkce daná předpisem $u(n) = 1$)

Příklad: Byla dokázáno:

$$\underbrace{N(n)}_{f(n)} = n = \sum_{d|n} \underbrace{\varphi(d)}_{g(d)} \quad \text{a také} \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \overbrace{\frac{n}{d}}^{N\left(\frac{n}{d}\right)} = \sum_{d|n} \underbrace{N(d)}_{f(d)}\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

$\Rightarrow$ Stačilo dokázat jen jedno z těchto tvrzení. Druhé je jeho důsledkem!

Příklad: Von Mangoldtova fce $\Lambda: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je dána předpisem: $\Lambda(d) = \begin{cases} \ln p \iff d = p^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ jindy} \end{cases}$

Předpokládejme, že $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Potom:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{\substack{d = p_i^{\alpha} \\ \alpha \le \alpha_i}} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \underbrace{\Lambda(p_i^{\alpha})}_{\ln p_i} = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\alpha_i \ln p_i}_{\ln p_i^{\alpha_i}} = \ln p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = \ln n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}:$ $\boxed{\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)}$ (platí to i pro $n = 1$: $0 = \ln 1$ $\sum_{d|1} \Lambda(d) = \Lambda(1) = 0$)

$\ln n = \Lambda * u$

$\Rightarrow$ Pomocí Möbiovy inverzní formule můžeme získat předpis Λ:

$$\boxed{\Lambda(n) = \sum_{d|n} \ln d\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln\left(\frac{n}{d}\right)}$$

$\Lambda = \ln * \mu = \mu * \ln$

↑ Dirichl. součin je komutativní