$\forall n \in \mathbb{N}:$

Věta (Möbiova inverzní formule): Platí:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{f(n) = \sum_{d|n} g(d)}_{f = g * u} \iff \forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{g(n) = \sum_{d|n} f(d)\,\mu\left(\tfrac{n}{d}\right)}_{g = f * \mu}}$$

Důkaz:

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}: f(n) = \sum_{d|n} g(d) \cdot 1 \Rightarrow f = g * u \Rightarrow f * \mu = g * \overbrace{u * \mu}^{I} \Rightarrow f * \mu = g$

I … neutr. prvek vzhledem k Dirichl. součinu

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}: g(n) = \sum_{d|n} f(d)\,\mu\left(\tfrac{n}{d}\right) \Rightarrow g = f * \mu \Rightarrow g * u = f * \overbrace{\mu * u}^{I} = f$

(u je funkce daná předpisem $u(n) = 1$)

Příklad: Bylo dokázáno:

$$\underbrace{N(n)}_{f(n)} = n = \sum_{d|n} \underbrace{\varphi(d)}_{g(d)} \quad \text{a také} \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \overbrace{\frac{n}{d}}^{N\left(\frac{n}{d}\right)} = \sum_{d|n} \underbrace{N(d)}_{f(d)}\,\mu\left(\tfrac{n}{d}\right)$$

$\Rightarrow$ Stačilo dokázat jen jedno z těchto tvrzení. Druhé je jeho důsledkem!

Příklad: Von Mangoldtova fce $\Lambda: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je dána předpisem: $\Lambda(d) = \begin{cases} \ln p & \iff d = p^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$

Předpokládejme, že $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Potom:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{\substack{d = p_i^{\alpha} \\ \alpha \le \alpha_i}} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \underbrace{\Lambda(p_i^{\alpha})}_{\ln p_i} = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\alpha_i \ln p_i}_{\ln p_i^{\alpha_i}} = \ln p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = \ln n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}:$ $\boxed{\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)}$ (platí to i pro $n = 1$: $0 = \ln 1$ $\sum_{d|1} \Lambda(d) = \Lambda(1) = 0$)

$\ln n = \Lambda * u$

$\Rightarrow$ Pomocí Möbiovy inverzní formule můžeme získat předpis Λ:

$$\boxed{\Lambda(n) = \sum_{d|n} \ln d\ \mu\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln\left(\tfrac{n}{d}\right)}$$

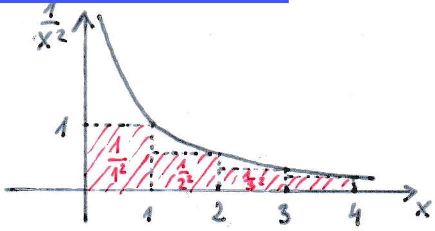
$\Lambda = \ln * \mu = \mu * \ln$

↑ Dirichl. součin je komutativní

Poznámka: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, právě když konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní řada.

Absolutně konvergentní řadu můžeme přerovnat, ale součet bude stejný jako u původní řady.



Příklad: $\sum_{a=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a^2}\right| = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \leq 1 + \int \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_2^{\infty} = 1 + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2}$ konverguje absolutně

$$\sum_{b=1}^{\infty} \left| \frac{\overbrace{\mu(b)}^{\in \{0, (-1)^k\}}}{b^2} \right| \leq \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b^2} \leq 1{,}5 \Rightarrow \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\mu(b)}{b^2}$$ konverguje absolutně

Věta: Platí: $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}}$$

$$I(k) = \left[\frac{1}{k}\right] = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 1 \\ 0 & \text{pro } k \neq 1 \end{cases}$$

Důkaz: $$\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\mu(b)}{b^2} = \underbrace{\sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\overset{\mu(a)}{1} \cdot \mu(b)}{(a \cdot b)^2}}_{\substack{\text{součin dvou absolutně} \\ \text{konv. řad} \Rightarrow \text{mohu přerovnat}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\sum_{a \cdot b = k} \mu(a)\mu(b)}^{I(k)}}{k^2} = 1$$

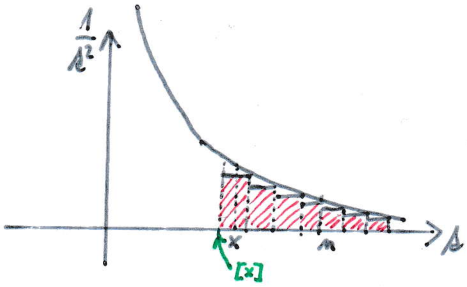
$$\Rightarrow \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\mu(b)}{b^2} = \frac{1}{\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{zéta}}}{\zeta(2)}} = \frac{6}{\pi^2}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Def. $(O(g(x)))$: Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou reálné funkce reálné proměnné. Potom

$$f(x) = O(g(x)) \iff \exists a \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: x \geq a \Rightarrow |f(x)| \leq c\,|g(x)|$$

$$\boxed{\textbf{Věta: Platí: } \sum_{m\le x}\frac{\mu(m)}{m^2}=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)}$$



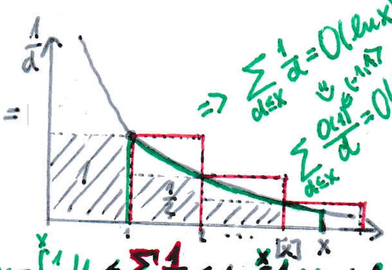
Důkaz:

Pro dost velká x:
$$\left|\sum_{m>x}\frac{\mu(m)}{m^2}\right|\le\sum_{m>x}\frac{|\mu(m)|}{m^2}\le\sum_{m>x}\frac{1}{m^2}\le$$
$$\le\int_{x-1}^{\infty}\frac{1}{t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_{x-1}^{\infty}=\frac{1}{x-1}\quad\Rightarrow$$
$$\frac{\left|\sum_{m>x}\frac{\mu(m)}{m^2}\right|}{\left|\frac{1}{x}\right|}\le\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x}}=\underbrace{\frac{x}{x-1}}_{\to 1}\le 2\quad\Rightarrow\quad\sum_{m>x}\frac{\mu(m)}{m^2}=O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Víme, že $\frac{6}{\pi^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^2}=\sum_{m\le x}\frac{\mu(m)}{m^2}+\sum_{m>x}\frac{\mu(m)}{m^2}=\sum_{m\le x}\frac{\mu(m)}{m^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\boxed{\textbf{Věta: Platí: } \sum_{m\le x}\varphi(m)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\ln x)}$$

Důkaz:
$$\sum_{m\le x}\varphi(m)=\sum_{m\le x}\sum_{d\mid m}\mu(d)\frac{m}{d}=\sum_{\substack{q,d\\ q\cdot d=m\le x}}\mu(d)\cdot q=\sum_{d\le x}\mu(d)\cdot\sum_{q\le\frac{x}{d}}q=$$
$$=\sum_{d\le x}\mu(d)\left(1+2+\dots+\left[\tfrac{x}{d}\right]\right)=\sum_{d\le x}\mu(d)\frac{\left[\frac{x}{d}\right]\left(\left[\frac{x}{d}\right]+1\right)}{2}=$$
$$=\sum_{d\le x}\mu(d)\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{d}-\underbrace{\varepsilon_{\frac{x}{d}}}_{\in[0,1)}\right)\left(\frac{x}{d}-\varepsilon_{\frac{x}{d}}+1\right)\right)=\sum_{d\le x}\mu(d)\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{d^2}+\frac{x}{d}\left(1-2\varepsilon_{\frac{x}{d}}\right)+\varepsilon_{\frac{x}{d}}^2-\varepsilon_{\frac{x}{d}}\right)=$$
$$=\sum_{d\le x}\frac{1}{2}x^2\frac{\mu(d)}{d^2}+\frac{1}{2}\sum_{d\le x}x\frac{\mu(d)}{d}\overbrace{\left(1-2\varepsilon_{\frac{x}{d}}\right)}^{O(1)\in(-1,1\rangle}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{d\le x}\left(\underbrace{\varepsilon_{\frac{x}{d}}^2-\varepsilon_{\frac{x}{d}}}_{O(1)}\right)\mu(d)}_{=}=$$
$$=\frac{x^2}{2}\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d^2}+\underbrace{x\cdot\left(\frac{1}{2}\sum_{d\le x}\mu(d)\frac{1-2\varepsilon_{\frac{x}{d}}}{d}\right)}_{O(\ln x)}+O(x)=$$
$$=\frac{x^2}{2}\left(\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)+O(x\cdot\ln x)=\frac{3}{\pi^2}x^2+\underbrace{O(x)+O(x\cdot\ln x)}_{O(x\ln x)}$$



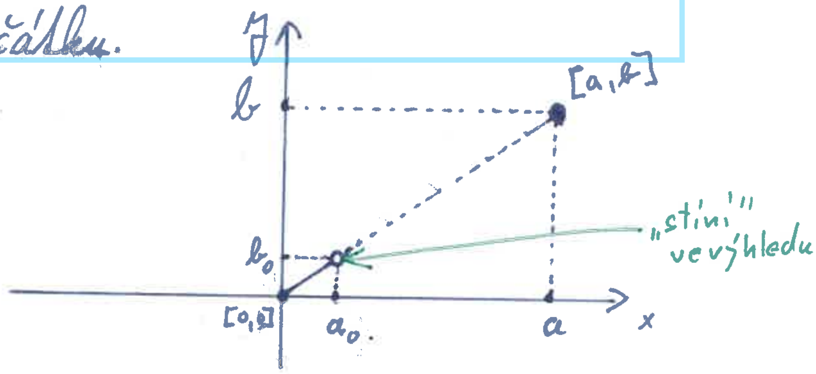
$$\Rightarrow\sum_{d\le x}\frac{1}{d}=O(\ln x)$$
$$\Downarrow\ (-1,1\rangle$$
$$\sum_{d\le x}\frac{O(1)}{d}=O(\ln x)$$

$$\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt\le\sum_{d\le x}\frac{1}{d}\le 1+\int_1^x\frac{1}{t}\,dt=1+\ln x$$

Viditelnost z počátku

Motivace: Představme si, že jsme v rovině $\mathbb{R}^2$ a díváme se z bodu $[0,0]$ kolem sebe. Které body $[a,b]\in\mathbb{Z}^2$ (tzv. mřížové body) můžeme vidět?

1.) Jestliže $\gcd(a,b)=d>1$, pak bod $[a,b]$ není viditelný z počátku.



$$[a,b] = [a_0 d, b_0 d] = \underbrace{[a_0,b_0]}_{\in\mathbb{Z}^2} + \underbrace{(d-1)}_{>0}(a_0,b_0)$$

2.) Jestliže $\gcd(a,b)=1$, pak je bod $[a,b]\in\mathbb{Z}^2$ viditelný z počátku.

Pro spor předpokládejme, že existuje bod $[a_0,b_0]\in\mathbb{Z}^2$, který „stíní" ve výhledu na $[a,b]$.

$\Rightarrow$ Musí platit, že $[a_0,b_0]\neq[a,b]$ a zároveň:

$\frac{a_0}{b_0}=\frac{a}{b}$ Búno můžeme předpokládat, že $\gcd(a_0,b_0)=1$

(kdyby $\gcd(a_0,b_0)=d \Rightarrow \frac{a_0}{b_0}=\frac{d a_{00}}{d b_{00}} \Rightarrow$ stínil by bod $[a_{00},b_{00}]$, kde $\gcd(a_{00},b_{00})=1$)

$\Rightarrow a_0 b = a b_0 \quad | \gcd(a_0,b_0)=1 \Rightarrow a_0 | a \Rightarrow \exists k_1\in\mathbb{Z}: a = k_1 a_0 \Rightarrow$

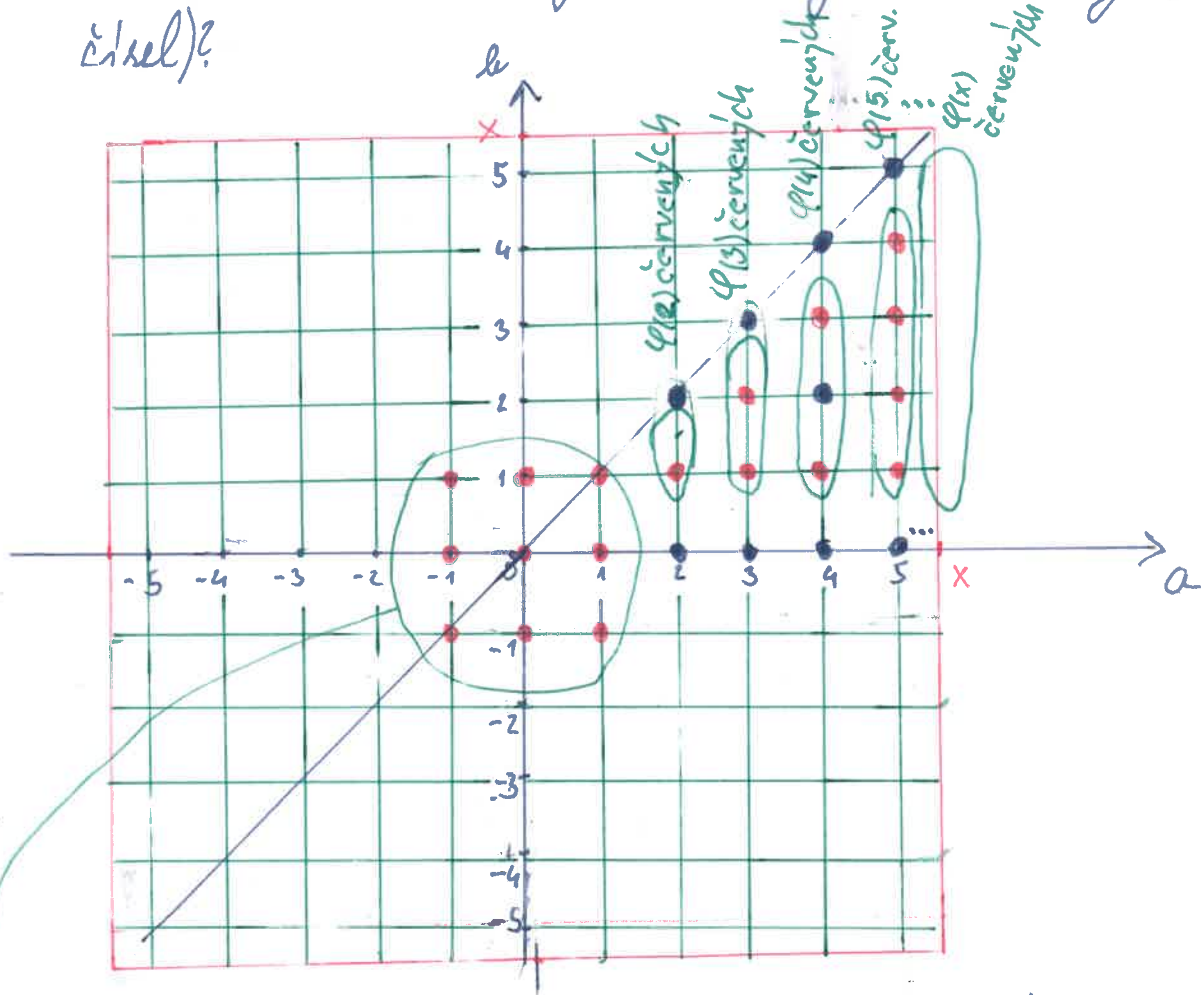
$\Rightarrow a_0 b = k_1 a_0 b_0 \Rightarrow b = k_1 b_0 \Rightarrow (k_1|a \wedge k_1|b) \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 | \gcd(a,b)=1 \Rightarrow k_1\in\{-1,1\}$ ale v případě $k_1=-1$ by $[a_0,b_0]=[-a,-b] \Rightarrow$ bod $[a_0,b_0]$ by nestínil $\Rightarrow k_1=1 \Rightarrow$ $[a_0,b_0]=[a,b] \Rightarrow$ spor!

Def (Viditelnost z počátku): Řekneme, že bod $[a,b]\in\mathbb{Z}^2$ je viditelný z počátku právě tehdy, když $[a,b]\in V$, kde:

$$V = \{[a,b]\in\mathbb{Z}^2 \mid \gcd(a,b)=1\}$$

Problém: Jak velkou část mřížových bodů tvoří ty, které jsou viditelné z počátku? Jinak řečeno, jak velkou část z množiny dvojic celých čísel tvoří dvojice nesoudělných čísel (tj. s jakou pravděpodobností náhodně vybereme dvojici nesoudělných čísel)?



$V(x)$ = počet bodů viditelných z počátku ve čtverci o straně $2X$; $X\in\mathbb{N}$

$$V(X) = 9 + 8\Big(\sum_{2\le m\le X}\varphi(m)\Big) = 1 + 8\Big(\sum_{m\le X}\varphi(m)\Big)$$

celkový počet mřížových bodů v tomto čtverci: $(2X+1)^2$

$\Rightarrow$ Poměr viditelných mřížových bodů ku počtu všech mřížových bodů ve čtverci o straně $2X$:

$$\frac{1 + 8\cdot \sum_{n\leq X} \varphi(n)}{(2X+1)^2} = \frac{1 + 8\cdot\left(\frac{3}{\pi^2}X^2 + O(X\ln X)\right)}{4X^2+4X+1} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4X^2\left(1+\frac{1}{X}+\frac{1}{4X^2}\right)}}_{\downarrow\ 0} - \underbrace{\frac{8\cdot\frac{3}{\pi^2}\cancel{X^2}}{4\cancel{X^2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{X}+\frac{1}{4X^2}}_{\downarrow 1}\right)}}_{\downarrow\ \frac{6}{\pi^2}} - \underbrace{\frac{8\cdot O(X\ln X)}{4X^2\left(\underbrace{1+\frac{1}{X}+\frac{1}{4X^2}}_{\downarrow 1}\right)}}_{=\ O\left(\frac{\ln X}{X}\right)\ \downarrow\ 0} \rightarrow \underline{\underline{\frac{6}{\pi^2} \doteq 0{,}608}}$$

Věta: Nechť f má spojitou derivaci na $\langle 1, x\rangle$ a $y \in \langle 2, x\rangle$. Potom:

1.) $$\sum_{k \le x} f(k) = [x]f(x) - \int_1^x [t]f'(t)\,dt$$

2.) $$\sum_{k \le x} f(k) = ([x]-x)f(x) + f(1) + \int_1^x f(t)\,dt + \int_1^x (t-[t])f'(t)\,dt$$

3.) $$\sum_{y<k\le x} f(k) = ([x]-x)f(x) - ([y]-y)f(y) + \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t-[t])f'(t)\,dt$$

Důkaz: Protože $y \in \langle 2, x\rangle$, je $2 \le x$. Musí proto existovat $k, k+1 \in \mathbb{Z} \cap \langle 1, x\rangle$.

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} [t]f'(t)\,dt = k \cdot \int_k^{k+1} f'(t)\,dt = k[f(t)]_k^{k+1} = k(f(k+1) - f(k)) = (k+1)f(k+1) - kf(k) - f(k+1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{[x]-1} \int_k^{k+1} [t]f'(t)\,dt}_{\|} = \sum_{k=1}^{[x]-1} (k+1)f(k+1) - \sum_{k=1}^{[x]-1} kf(k) - \sum_{k=1}^{[x]-1} f(k+1)$$

$$\int_1^{[x]} [t]f'(t)\,dt = \sum_{k=2}^{[x]} kf(k) - \sum_{k=1}^{[x]-1} kf(k) - \sum_{k=2}^{[x]} f(k) = [x]f([x]) - f(1) - \sum_{k=2}^{[x]} f(k) = [x]f([x]) - \sum_{k=1}^{[x]} f(k)$$

$$\int_{[x]}^x \underbrace{[t]}_{[x]} f'(t)\,dt = [x]\int_{[x]}^x f'(t)\,dt = [x][f(t)]_{[x]}^x = [x]f(x) - [x]f([x])$$

$$\Rightarrow \int_1^x [t]f'(t)\,dt = [x]f(x) - \sum_{k=1}^{[x]} f(k) \qquad \Rightarrow \text{tvrzení 1.)}$$

$$\int_1^x t f'(t)\,dt = \begin{vmatrix} u = t & v' = f' \\ u' = 1 & v = f \end{vmatrix} = [t f(t)]_1^x - \int_1^x f(t)\,dt = xf(x) - f(1) - \int_1^x f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x (t-[t])f'(t)\,dt = (x-[x])f(x) - f(1) - \int_1^x f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{[x]} f(k) \qquad \Rightarrow \text{tvrzení 2.)}$$

$y \in \langle 2, x\rangle \Rightarrow y \ge 2 \Rightarrow$ analogicky:

$$\int_1^y (t-[t])f'(t)\,dt = (y-[y])f(y) - f(1) - \int_1^y f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{[y]} f(k)$$

$$\Rightarrow \int_y^x (t-[t])f'(t) = (x-[x])f(x) - (y-[y])f(y) - \int_y^x f(t)\,dt + \sum_{k=[y]+1}^{[x]} f(k) \qquad \Rightarrow \text{tvrzení 3.)}$$