Def $(o(g(x)))$: Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou reálné funkce reálné proměnné. Funkce $f(x) = o(g(x))$ právě když

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Věta (Čebyševovy nerovnosti): Platí:

$$\frac{x}{\ln x}\left(\ln 2 + o(1)\right) \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\ln x}\left(\ln 4 + o(1)\right)$$

Důkaz: Lema 10 říká: $\pi(x) = \dfrac{\psi(x)}{\ln x} + O\left(\dfrac{x}{\ln^2 x}\right)$

„dosaď“

Čebyševova věta: $x \ln 2 + O(\ln x) \leq \psi(x) \leq x \ln 4 + O(\ln^2 x)$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

$$\frac{x \ln 2 + O(\ln x)}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) \leq \pi(x) \leq \frac{x \ln 4 + O(\ln^2 x)}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

$$\frac{x}{\ln x}\ln 2 + O(1) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\ln x}\ln 4 + O(\ln x) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

$$\frac{x}{\ln x}\left(\ln 2 + \frac{\ln x}{x}O(1) + \frac{\ln x}{x}O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\right) \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\ln x}\left(\ln 4 + \frac{\ln x}{x}O(\ln x) + \frac{\ln x}{x}O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\right)$$

$$\frac{x}{\ln x}\left(\ln 2 + \overbrace{\underbrace{O\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\to 0}}^{o(1)} + \overbrace{\underbrace{O\left(\frac{1}{\ln x}\right)}_{\to 0}}^{o(1)}\right) \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\ln x}\left(\ln 4 + \overbrace{\underbrace{O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)}_{\to 0}}^{o(1)} + \overbrace{\underbrace{O\left(\frac{1}{\ln x}\right)}_{\to 0}}^{o(1)}\right)$$

$$\frac{x}{\ln x}\left(\ln 2 + o(1)\right) \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\ln x}\left(\ln 4 + o(1)\right)$$

$\square$

- Čebyšev ve skutečnosti došel k přesnějším odhadům. Místo funkce $\chi(x) = [x]-2[\frac{x}{2}]$ použil funkci $\chi(x) = [x]-[\frac{x}{2}]-[\frac{x}{3}]-[\frac{x}{5}]+[\frac{x}{30}]$ jejíž perioda $T = 30$ a pro $1 \le x < 6$ je $\chi(x) = 1$.

Př: Načrtněte graf funkce $\chi(x)$.

$0 \{\; x \in \langle 0,1) \Rightarrow \chi(x) = 0$

$1 \begin{cases} x \in \langle 1,2) \Rightarrow \chi(x) = 1 \\ x \in \langle 2,3) \Rightarrow \chi(x) = 2-1 = 1 \\ x \in \langle 3,4) \Rightarrow \chi(x) = 3-1-1 = 1 \\ x \in \langle 4,5) \Rightarrow \chi(x) = 4-2-1 = 1 \\ x \in \langle 5,6) \Rightarrow \chi(x) = 5-2-1-1 = 1 \end{cases}$

$0 \{\; x \in \langle 6,7) \Rightarrow \chi(x) = 6-3-2-1 = 0$

$1 \begin{cases} x \in \langle 7,8) \Rightarrow \chi(x) = 7-3-2-1 = 1 \\ x \in \langle 8,9) \Rightarrow \chi(x) = 8-4-2-1 = 1 \\ x \in \langle 9,10) \Rightarrow \chi(x) = 9-4-3-1 = 1 \end{cases}$

$0 \{\; x \in \langle 10,11) \Rightarrow \chi(x) = 10-5-3-2 = 0$

$1 \{\; x \in \langle 11,12) \Rightarrow \chi(x) = 11-5-3-2 = 1$

$0 \{\; x \in \langle 12,13) \Rightarrow \chi(x) = 12-6-4-2 = 0$

$1 \begin{cases} x \in \langle 13,14) \Rightarrow \chi(x) = 13-6-4-2 = 1 \\ x \in \langle 14,15) \Rightarrow \chi(x) = 14-7-4-2 = 1 \end{cases}$

$0 \begin{cases} x \in \langle 15,16) \Rightarrow \chi(x) = 15-7-5-3 = 0 \\ x \in \langle 16,17) \Rightarrow \chi(x) = 16-8-5-3 = 0 \end{cases}$

$1 \{\; x \in \langle 17,18) \Rightarrow \chi(x) = 17-8-5-3 = 1$

$0 \{\; x \in \langle 18,19) \Rightarrow \chi(x) = 18-9-6-3 = 0$

$1 \{\; x \in \langle 19,20) \Rightarrow \chi(x) = 19-9-6-3 = 1$

$0 \begin{cases} x \in \langle 20,21) \Rightarrow \chi(x) = 20-10-6-4 = 0 \\ x \in \langle 21,22) \Rightarrow \chi(x) = 21-10-7-4 = 0 \\ x \in \langle 22,23) \Rightarrow \chi(x) = 22-11-7-4 = 0 \end{cases}$

$1 \{\; x \in \langle 23,24) \Rightarrow \chi(x) = 23-11-7-4 = 1$

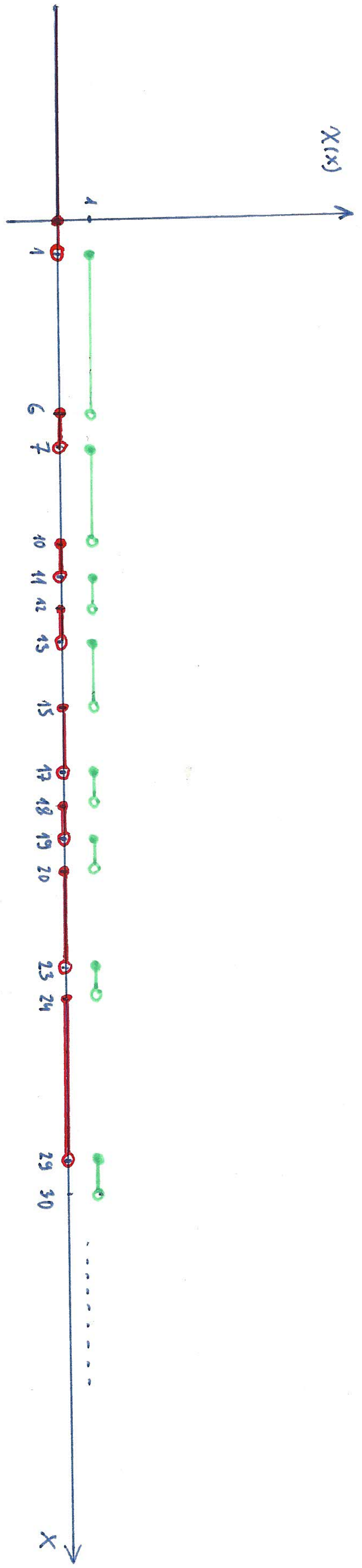
$0 \begin{cases} x \in \langle 24,25) \Rightarrow \chi(x) = 24-12-8-4 = 0 \\ x \in \langle 25,26) \Rightarrow \chi(x) = 25-12-8-5 = 0 \\ x \in \langle 26,27) \Rightarrow \chi(x) = 26-13-8-5 = 0 \\ x \in \langle 27,28) \Rightarrow \chi(x) = 27-13-9-5 = 0 \\ x \in \langle 28,29) \Rightarrow \chi(x) = 28-14-9-5 = 0 \end{cases}$

$1 \{\; x \in \langle 29,30) \Rightarrow \chi(x) = 29-14-9-5 = 1$

$\Rightarrow \chi(x) = 30-15-10-6+1 = 0$

⋮

$\forall x \in \langle 0,\infty): \chi(x+30) = 30+[x]-15-[\frac{x}{2}]-10-[\frac{x}{3}]-6-[\frac{x}{5}]+1+[\frac{x}{30}] = \chi(x)$



Čebyšev dokázal platnost nerovností:

$$\boxed{\frac{x}{\ln x}\left(c_1+o(1)\right) \le \pi(x) \le \frac{x}{\ln x}\left(c_2+o(1)\right)}\quad \text{, kde}$$

$$c_1=\ln\left(2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}30^{-\frac{1}{30}}\right) \approx 0{,}92129 \quad \text{a} \quad c_2=\frac{6}{5}c_1 \doteq 1{,}105\,55$$

Zajímavým důsledkem těchto nerovností je:

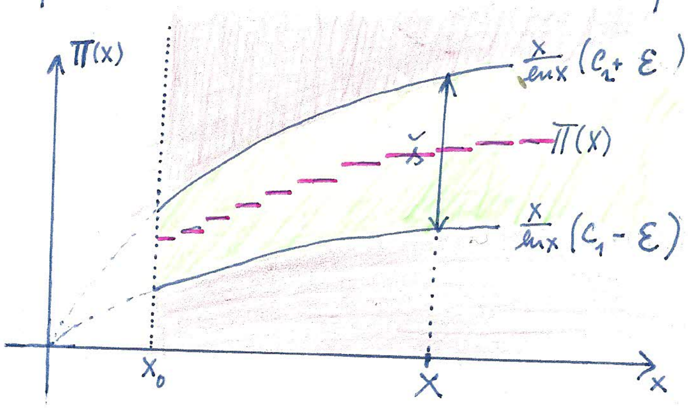
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(2x)}{\pi(x)} \ge \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{\ln(2x)}\left(c_1+o(1)\right)}{\frac{x}{\ln x}\left(c_2+o(1)\right)} = \frac{2c_1}{c_2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(2x)} \overset{l'H}{=} \frac{2c_1}{c_2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}\cdot 2} = \frac{2c_1}{c_2}=\frac{10}{6}>1$$

$\Rightarrow$ Pro dostatečně velká x platí $\pi(2x)>\pi(x)$, to znamená, že mezi x a $2x$ existuje nějaké prvočíslo.

Věta (Bertrandův postulát): Pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n>3$ existuje prvočíslo p splňující:

$$n<p<2n-2$$

Poznámka: Ohraničení funkce $\pi(x)$: $\frac{x}{\ln x}(c_1+o(1)) \le \pi(x) \le \frac{x}{\ln x}(c_2+o(1))$ je „dobré" po stránce kvalitativní, ale ne po stránce kvantitativní (při $c_2\neq c_1$):



Šířka pásu, ve kterém je $\pi(x)$ „uvězněna" roste nade všechny meze:

$$\boxed{\check{s}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{x}{\ln x}}_{\infty}\left(\underbrace{c_2-c_1}_{>0}+\underbrace{o(1)}_{0}\right)=\infty}$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists x_0$: Pro $x>x_0$: $|o(1)|<\varepsilon$

Prvočíselná věta

Pánové Johan Carl Friedrich Gauss a Adrien-Marie Legendre studovali tabulku hodnot funkcí $\pi(x)$ a $\frac{x}{\ln x}$ pro $x \leq 10^6$:

x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	$\pi(x)/\frac{x}{\ln x}$
10	4	4,3	0,93
10^2	25	21,7	1,15
10^3	168	144,8	1,16
10^4	1 229	1 086	1,13
10^5	9 592	8 686	1,10
10^6	78 498	72 382	1,08

a vyslovili hypotézu, že $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1 \;.}$

Čebyševův výsledek (viz dříve):

$$0{,}92129 + o(1) \leq \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \leq 1{,}10555 + o(1) \qquad \text{(rok 1851)}$$

tomu také nasvědčuje. Navíc dokázal, že zmíněná limita, pokud existuje, musí být rovna jedné. Její existenci se mu ale nepodařilo dokázat. Gauss-Legendrovu hypotézu - prvočíselnou větu - se podařilo dokázat až v roce 1896 (Jacques Salomon Hadamard a Charles-Jean Étienne Gustav Nicolas de la Vallé Poussin nezávisle na sobě) metodami komplexní matematické analýzy. Důkaz metodami teorie čísel podal v roce 1949 Atle Selberg a Paul Erdös.