



Reálné funkce jedné reálné proměnné

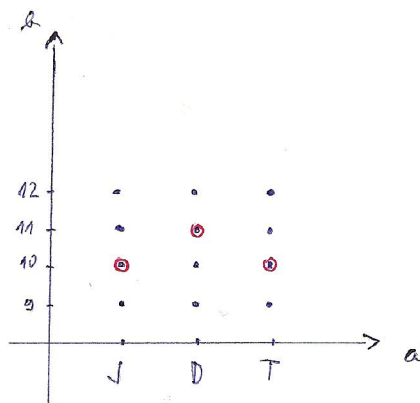
Def (Kartézský součin): Kartézským součinem množin A a B nazveme množinu

$$A \times B = \{ \underbrace{(a, b)}_{\text{uspořádaná dvojice}} \mid a \in A, b \in B \}$$

Př: $A = \{ \text{Josef, David, Tonda} \}$, $B = \{ 9, 10, 11, 12 \}$ (číslo bot)

$$\Rightarrow A \times B = \{ (\text{Josef}, 9); (\text{Josef}, 10); (\text{Josef}, 11); (\text{Josef}, 12); (\text{David}, 9); \dots; (\text{Tonda}, 12) \}$$

Grafické znázornění:



Def (Relace): Binární relací prvků množiny A a B nazveme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$.
Jestliže $(a, b) \in R$, pak píšeme $a R b$, nebo $R(a) = b$.

Př: Relací může být „má číslo bot“. Tonda má číslo bot 10, David 11, Josef 10.
Trn $R = \{ (\text{Tonda}, 10); (\text{David}, 11); (\text{Josef}, 10) \}$

Def: (Obor hodnot, definiční obor): Definičním oborem relace $R \subseteq A \times B$ nazveme množinu

$$D_R = \{ a \in A \mid \exists b \in B : R(a) = b \}$$

Oborem hodnot relace $R \subseteq A \times B$ nazveme množinu

$$H_R = \{ b \in B \mid \exists a \in A : R(a) = b \}$$

Př: $R = \{ (1, 3); (1, 6); (2, 0); (3, 2) \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

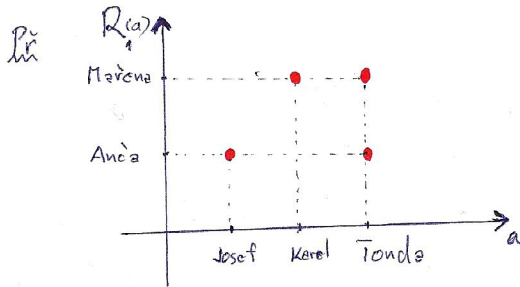
$$\Rightarrow \underline{D_R = \{ 1, 2, 3 \}}$$

$$\underline{H_R = \{ 3, 6, 0, 2 \}}$$

Def. (Zobrazení): Zobrazením z množiny A do množiny B nazveme libovolnou relaci $R \subseteq A \times B$ splňující podmínku

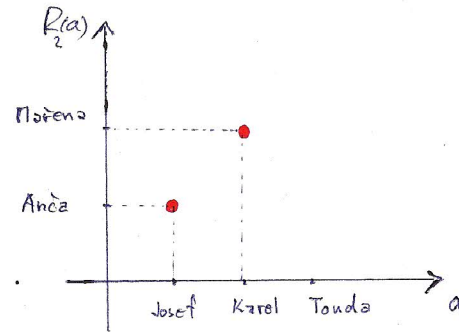
$$\forall a \in D_R \exists! b \in B : R(a) = b$$

Značíme $R: A \rightarrow B$.



relace R_1 ... být v milostném poměru

$\Rightarrow$ R_1 není zobrazení



Relace R_2 ... být ženat s

$\Rightarrow$ R_2 je zobrazení (Značíme $R_2: A \rightarrow B$)

$= \{ \text{Josef, Karel, Tonda} \}$
 $= \{ \text{Anča, Mařena} \}$

Def. (Funkce): Reálnou funkcí jedné reálné proměnné nazveme každé zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Př. 1: $f = \{ (x, 2x) \mid x \in \mathbb{R} \}$ je funkce, která každému reálnému číslu x přiřazuje číslo $2x$. Značíme: $f(x) = 2x$ (předpis)

($g = \{ (x, 2x) \mid x \in (0, 1) \}$ má stejný předpis, ale jiný def. obor $\Rightarrow$ je to jiná funkce.)

Úmluva: Funkce je zadána svým definičním oborem a předpisem, který každému prvku definičního oboru přiřadí jeho (právě jednu) hodnotu. Často budeme funkci zadávat pouze předpisem; v takovém případě jejím definičním oborem rozumíme množinu všech reálných čísel, pro něž má daný předpis smysl.

Př. 2: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

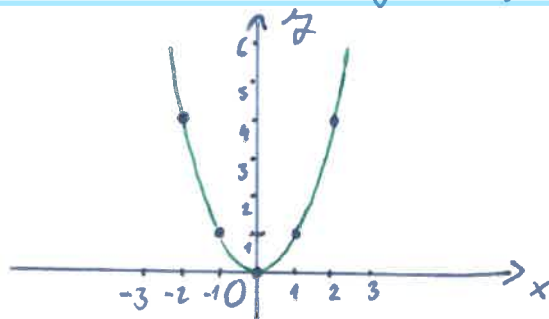
$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Pr. min Graficky znázorněte relaci R a rozhodněte, zda jde o funkci.

1.) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$

$\forall x \in \mathbb{R} \exists y = x^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow D_R = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} = D_R \exists! y \in \mathbb{R} : R(x) = y = x^2 \Rightarrow \underline{\underline{R \text{ je funkce}}}$

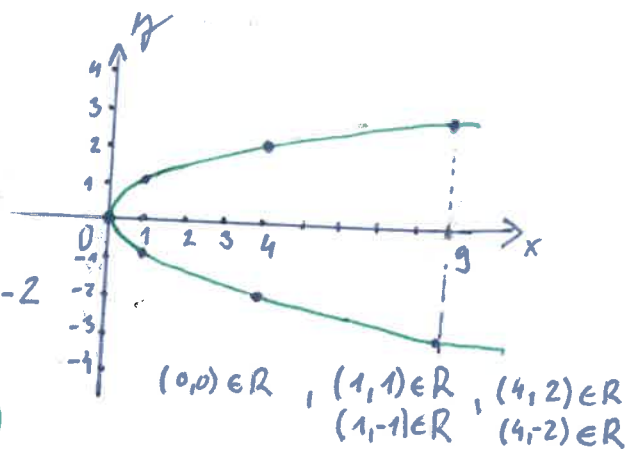


2.) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 \}$

y existuje jen pro $x \in \langle 0, \infty \rangle \Rightarrow D_R = \langle 0, \infty \rangle$

např. pro $x=4$: $R(x) = y = 2 \wedge R(x) = y = -2$

$\Rightarrow \underline{\underline{R \text{ není funkce}}}$ (jak to opravit?)

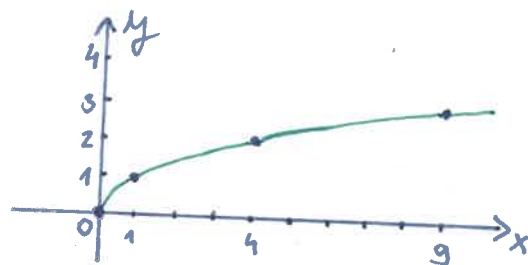


3.) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x, y \geq 0 \}$

$D_R = \langle 0, \infty \rangle$

$\forall x \in \langle 0, \infty \rangle \exists! y \in \langle 0, \infty \rangle : R(x) = y = \sqrt{x}$
($y^2 = x$)

$\Rightarrow \underline{\underline{R \text{ je funkce}}}$

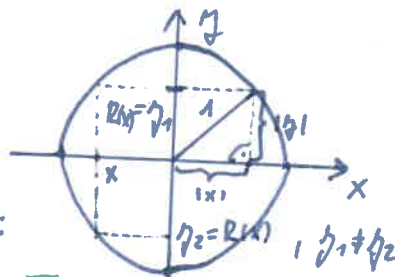


4.) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \} \Rightarrow D_R = \langle -1, 1 \rangle$

$\exists x \in \langle -1, 1 \rangle$ (např. $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$) $\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 \neq y_2$:

$R(x) = y_1 (= \sqrt{\frac{1}{2}}) \wedge R(x) = y_2 (= -\sqrt{\frac{1}{2}})$

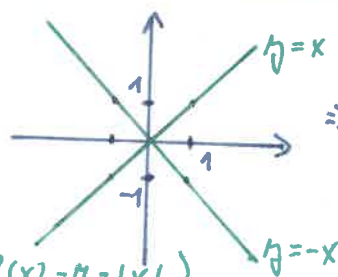
$\Rightarrow \underline{\underline{R \text{ není funkce}}}$



5.) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0 \}$

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = x \end{cases}$

(Přidáním podmínky $y \geq 0$ bychom obdrželi funkci $R(x) = y = |x|$.)



$\Rightarrow \underline{\underline{R \text{ není funkce}}}$

Operace s funkcemi

Def: Necht' f a g jsou funkce. Definujeme funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ a $g \circ f$ předpisem:

$$1.) (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$4.) \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$2.) (f-g)(x) := f(x) - g(x)$$

$$5.) (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

$$3.) (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

Př: f je dáno předpisem $f(x) = 2x$, g je dáno předpisem $g(x) = \sin x$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = 2x + \sin x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x}{\sin x}$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x) \cdot (\sin x)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \sin(2x)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = 2 \cdot \sin x$$

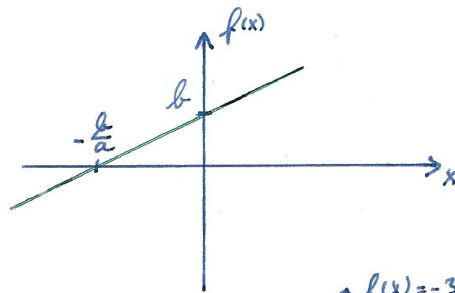
Def (Elementární funkce): Elementárními funkcemi nazveme ty funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací $+$, $-$, $\cdot$, $\frac{\cdot}{\cdot}$ a skládání funkcí ($\circ$).

Př: $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $h(x) = \frac{1}{x}$ (jsou základní elementární funkce) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (h \circ (f+g))(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{je elementární funkce}$$

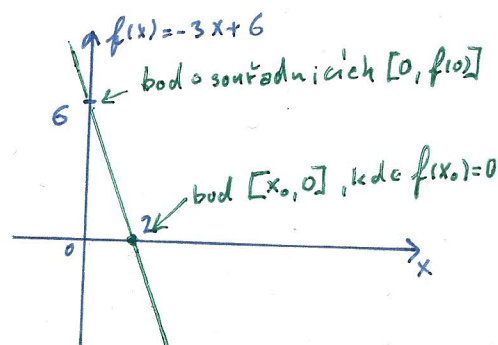
Lineární funkce

$$f(x) = ax + b \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$



Př. načrtněte graf funkce $f(x) = -3x + 6$.

Grafem lineární funkce je přímka - stačí najít dva body, jimiž prochází. Například průsečíky s osami.



$$\text{I.) } f(0) = -3 \cdot 0 + 6 = 6$$

$$\text{II.) } f(x_0) = 0$$

$$-3x_0 + 6 = 0$$

$$x_0 = 2$$

Lineární rovnice: Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující: $3(x+1) = 4(x-1) + x$

$$\text{Řešení: } 3(x+1) = 4(x-1) + x$$

$$3x + 3 = 4x - 4 + x$$

$$7 = 2x$$

$$x = \frac{7}{2}$$

Lineární nerovnice: Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující: $4(2x-1) > 12(x+6) - x$

$$\text{Řešení: } 4(2x-1) > 12(x+6) - x$$

$$8x - 4 > 12x + 72 - x$$

$$-3x > 76 \quad | : (-3) \quad \text{Pozor! Při dělení záporným číslem musíme otočit znaménko!}$$

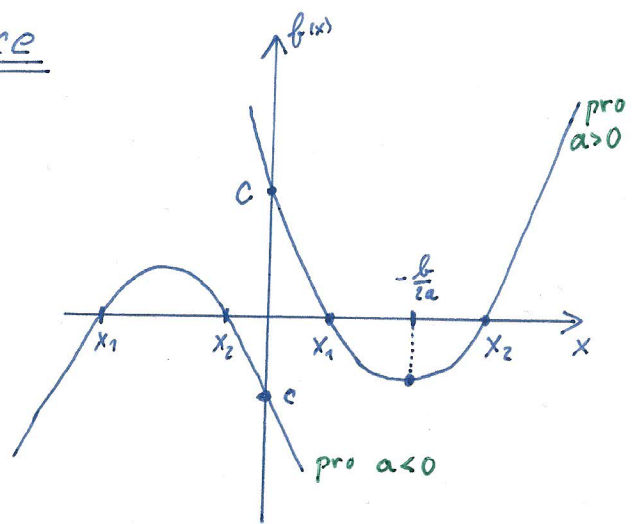
$$x < \frac{76}{-3}$$

$$x \in (-\infty, -\frac{76}{3})$$

Kvadratická funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

grafem je parabola



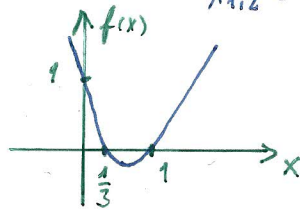
Kvadratická rovnice: $ax^2 + bx + c = 0$

tuto rovnici splňují: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ pokud $b^2 - 4ac = \text{Diskriminant} = D > 0$

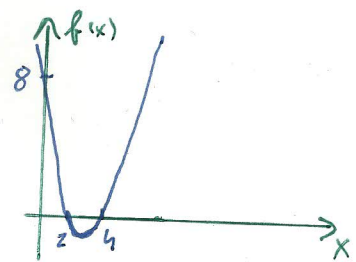
Najdeme tak čísla x_1, x_2 , kde $f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ a $f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c = 0$
 $\Rightarrow$ V bodech x_1, x_2 (pokud existují) protíná graf funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ osu x .

Př: Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující:

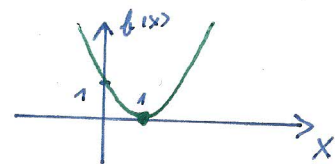
1.) $\underbrace{3x^2 - 4x + 1}_{f(x)} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = 1 \\ \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$



2.) $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$
jinak: $x^2 - 6x + 8 = (x-4) \cdot (x-2) \Rightarrow$

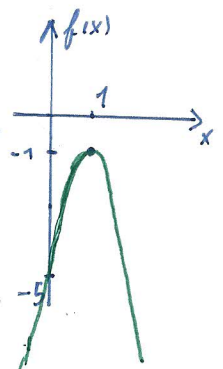


3.) $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$



4.) $-x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{-2} \Rightarrow x_{1,2} \text{ neexistuje řešení!}$

$-(x^2 - 4x + 5) = -(x^2 - 4x + 4 + 1) = -(x-2)^2 - 1$



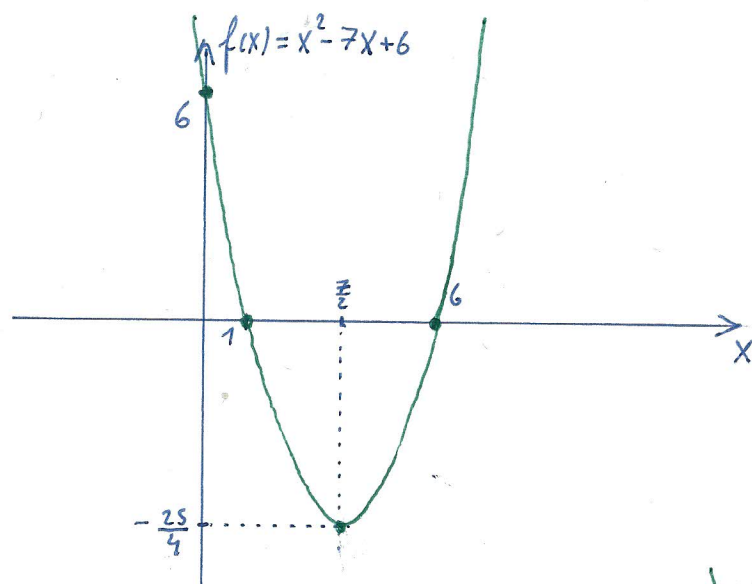
Pr
min Napište graf funkce

1.) $f(x) = x^2 - 7x + 6$

průsečík s osou y: $f(0) = 0^2 - 7 \cdot 0 + 6 = 6$

průsečíky s osou x: $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix}$

souřadnice vrcholu paraboly: $x^2 - 7x + 6 = \underbrace{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6}_{x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2} =$
 $= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{-49 + 24}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

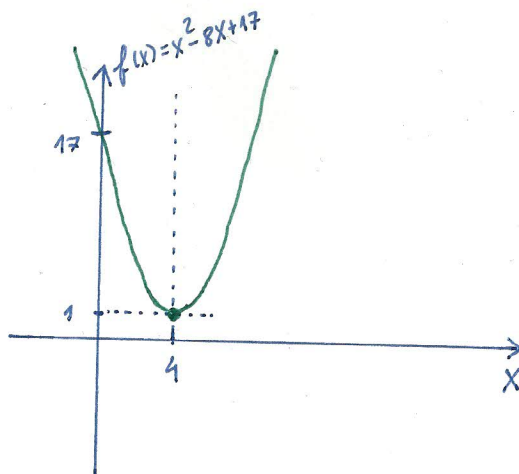


2.) $f(x) = x^2 - 8x + 17$

průs. s osou y: $f(0) = 17$

průs. s osou x: $D = 64 - 4 \cdot 17 = -4 \Rightarrow$ neexistují

souřadnice vrcholu: $x^2 - 8x + 17 =$
 $= (x - 4)^2 - 16 + 17 =$
 $= (x - 4)^2 + 1$



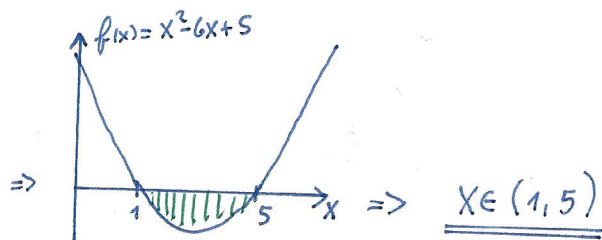
Kvadratické nerovnice:

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

Pr: Vyřešte kvadratickou nerovnici

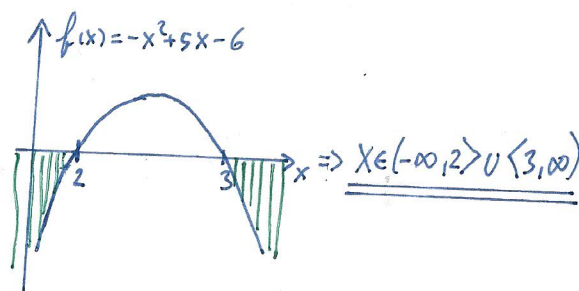
1.) $x^2 - 6x + 5 < 0$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}$$



2.) $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow$$

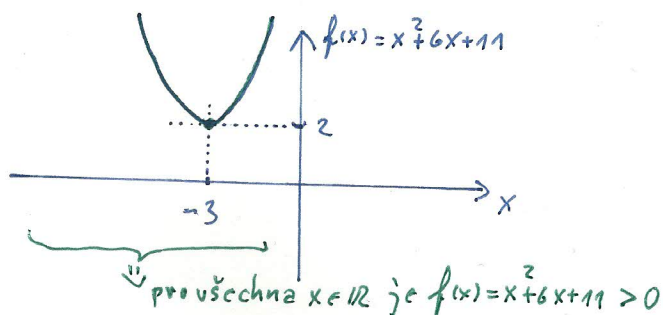


3.) $x^2 + 6x + 11 < 0$

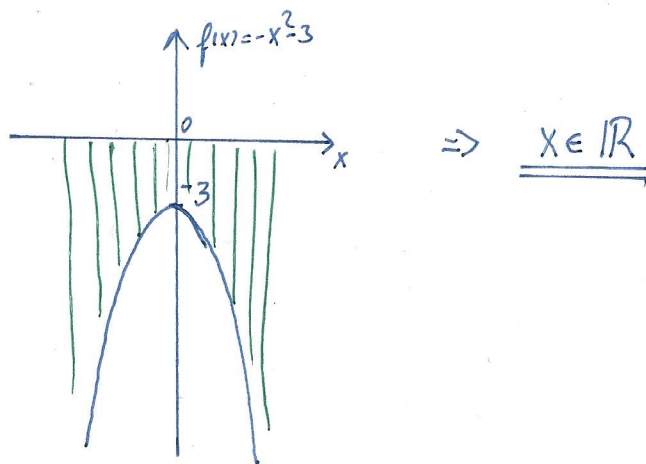
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 11}}{2} \Rightarrow \text{průs. neexistuje}$$

$$x^2 + 6x + 11 = (x+3)^2 - 9 + 11 = (x+3)^2 + 2$$

$\Rightarrow$ řešení neexistuje $\Rightarrow x \in \emptyset$



4.) $-x^2 - 3 \leq 0$



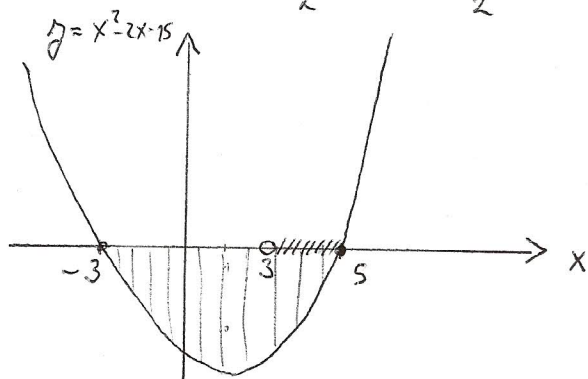
Pr: Vyřešte soustavu nerovnic

① $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

$2x - 6 > 0$

a) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$



$\Rightarrow x \in \langle -3, 5 \rangle$

b) $2x - 6 > 0$

$2x > 6$

$x > 3$



$x \in (3, \infty)$

$x \in \langle -3, 5 \rangle \cap (3, \infty)$

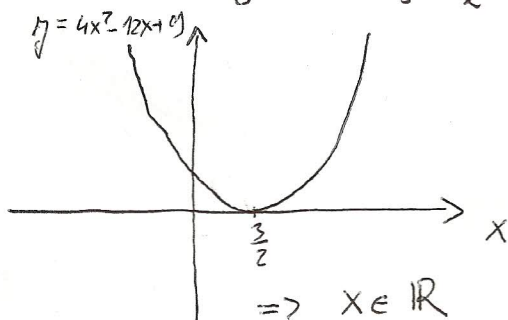
$x \in (3, 5)$

② $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$

$-x^2 + 9 \geq 0$

a) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

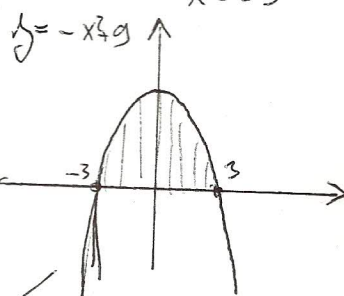


$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

b) $-x^2 + 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$



$\Rightarrow x \in \langle -3, 3 \rangle$

$x \in \mathbb{R} \cap \langle -3, 3 \rangle = \langle -3, 3 \rangle$

③

$$-(x^2 - 5x + 6) \leq 0$$

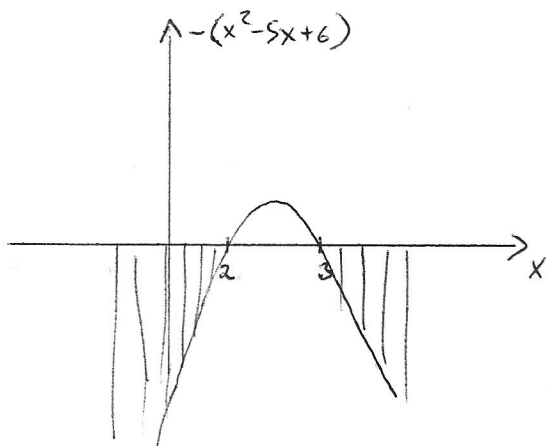
$$x^2 - 9x + 20 \leq 0$$

a) $-(x^2 - 5x + 6) \leq 0 \quad | \cdot (-1)$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$



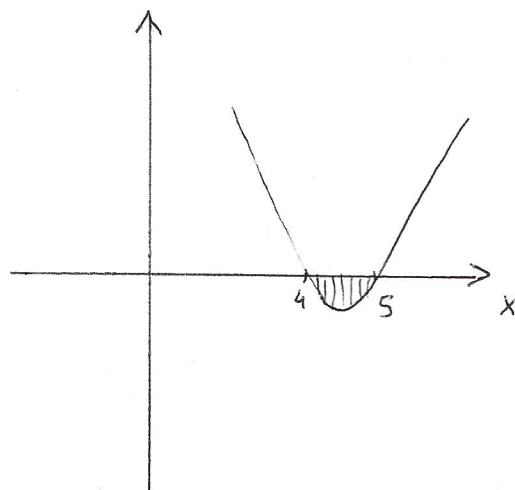
$$\Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

b)

$$x^2 - 9x + 20 \leq 0$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}$$



$$x \in (4, 5)$$

$$\begin{matrix} \searrow & \swarrow \\ x \in [(-\infty, 2) \cup (3, \infty)] \cap (4, 5) = \underline{\underline{(4, 5)}} \end{matrix}$$