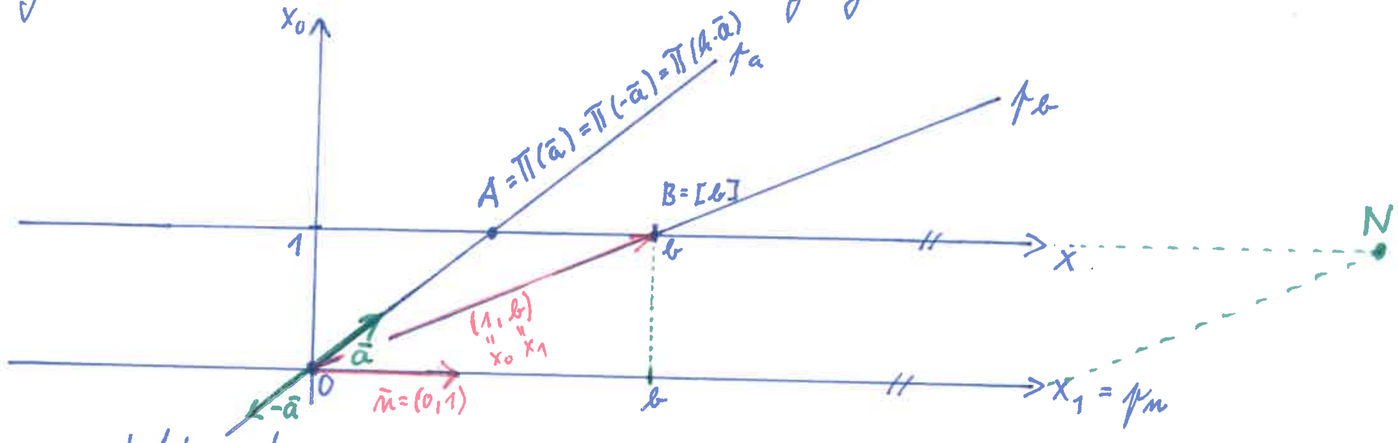
Projektivní prostor

Uvažujme množinu bodů $\mathcal{B}^* = \mathbb{R}$. Znázorníme ji jako osu x:



Osu x umístíme do roviny s osami x_0 a x_1 jak je znázorněno na obrázku (osa x tam představuje přímku $x_0 = 1$).

Dále uvažujme vektory z vektorového prostoru $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.
Každý nenulový vektor $\bar{a} = (a_1, a_2)$ a počátek O určuje přímku p_a. Ta protíná osu x v bodě A. Definujme zobrazení π tak, že vektoru $\bar{a}$, ale také jeho libovolnému nenulovému násobku přiřadí bod A. Všimněme si, že $\pi((1,b)) = [b] = B$

Jak by to ale dopadlo, kdybychom zvolili $\bar{m} = (0,1)$ … směr osy x_1 ?! Přímka p_m by osu x neprotla v žádném jejím (tzv. vlastním) bodě! Přidejme proto do množiny $\mathcal{B}^*$ bod N (tzv. nevlastní bod) a dodefinujme $\pi(\bar{m}) = N$ (a také $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\}: \pi(k \cdot \bar{m}) = N$).

Intuitivně bychom mohli chápat bod N jako „průsečík rovnoběžek (os x a x_1) v nekonečnu." Někdy je ale výhodnější si to představit tak, že jsme k bodům přímky (osy x) přidali její směr (je stejný jako směr osy x_1). $\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* \cup \{N\}$ je množina bodů osy x v „projektivním prostoru." – Rozšířili jsme ji o bod N.

Def. (Projektivní prostor $\mathcal{P}^n$): Projektivním prostorem dimenze n nad komutativním tělesem $(T,+,\cdot)$ nazveme uspořádanou trojici $(P, \mathbb{V}^{n+1}, \pi)$, kde

1.) P je neprázdná množina

2.) $\mathbb{V}^{n+1} = (V,+,\cdot)$ je vektorový prostor dimenze $n+1$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$ (nerozlišujeme značení operací na tělese a na vekt. prostoru), kde $n+1 \in \mathbb{N}$.

3.) $\pi: V - \{\bar{o}\} \to P$ je surjektivní zobrazení takové, že $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V - \{\bar{o}\}: \pi(\bar{x}) = \pi(\bar{y}) \Leftrightarrow \langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{y} \rangle$

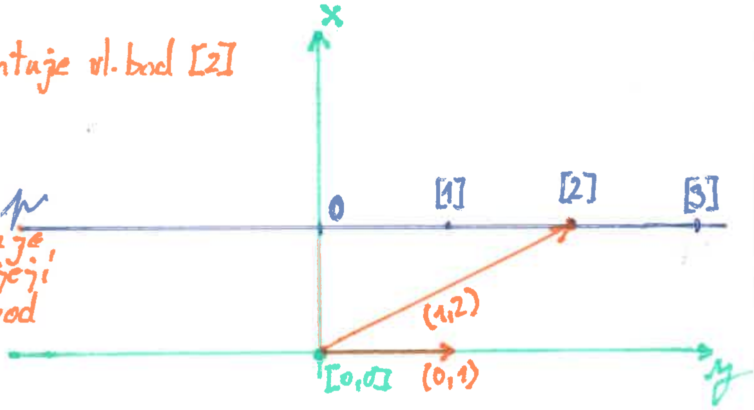
Příklad: $\mathbb{V}^{n+1} = \mathbb{R}^2$, $P = \{\langle \bar{x} \rangle, \bar{x} \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{o}\}\}$ ... množina všech 1-směrů $\mathbb{R}^2$,

$\pi: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to P$ je dáno předpisem $\pi(\bar{x}) = \langle \bar{x} \rangle$.

$\pi((3,6)) = \langle (3,6) \rangle = \langle (1,2) \rangle$ ... reprezentuje vl. bod [2]

$\pi((2,6)) = \langle (2,6) \rangle = \langle (1,3) \rangle$

$\pi((0,4)) = \langle (0,4) \rangle = \langle (0,1) \rangle$ ... reprezentuje směr p, = její nevlastní bod



$\Rightarrow$ $\mathcal{P}^1 = (P, V^{n+1}, \pi)$ je projektivní prostor (tzv. projektivní přímka), neboť π je

a) surjektivní: $\forall \langle \bar{x} \rangle \in P \ \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{o}\}: \pi(\bar{x}) = \langle \bar{x} \rangle$

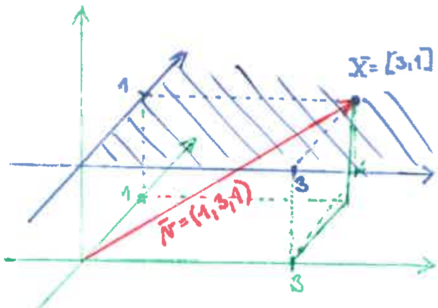
b) injektivní: $\pi(\bar{x}) = \pi(\bar{y}) \Rightarrow \langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{y} \rangle$ (Protože $\pi(\bar{x}) = \langle \bar{x} \rangle$ a $\pi(\bar{y}) = \langle \bar{y} \rangle$)

(Stejný příklad jako motivační)

Def. (Aritmetický repér): Nechť $\mathcal{P}^n = (P, \mathbb{V}^{n+1}, \pi)$ je projektivní prostor. Každou bázi $\mathcal{E} = \{\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_n\}$ vektorového prostoru $\mathbb{V}^{n+1}$ nazveme aritmetickým repérem projektivního prostoru $\mathcal{P}^n$.

Př. Uvažujme projektivní prostor $\mathcal{P}^2 = (P, \mathbb{R}^3, \pi)$, kde

$P = \{ \langle \bar{x} \rangle \mid x \in \mathbb{R}^3 - \{\bar{o}\} \}$, $\pi(\bar{x}) = \langle \bar{x} \rangle$



$\langle \bar{x} \rangle = \langle (1, x_1, x_2) \rangle$ ... reprezentuje vlastní body

$\langle \bar{x} \rangle = \langle (0, x_1, x_2) \rangle$ ... reprezentuje nevlastní bod

$\Rightarrow$ Každou bázi v.p. $\mathbb{R}^3$ nazveme aritmetickým repérem projektivní roviny $\mathcal{P}^2$.

a) Ověřte, zda $\mathcal{E} = \{(1,-1,2), (0,1,3), (2,0,5)\}$ je aritmetický repér $\mathcal{P}^2$.

Musela by to být báze na v. p. $\mathbb{R}^3$. Tj. musela by to být trojice lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{-2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{-2r_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{jsou lin. nez.} \Rightarrow \underline{\underline{\text{JE to aritm. repér } \mathcal{P}^2}}$$

b) Ověřte, zda $\mathcal{E} = \{(1,3,1); (2,1,3)\}$ je aritmetický repér $\mathcal{P}^2$.

Vektory jsou sice lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého), ale jsou pouze dva! $\Rightarrow$ netvoří bázi $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$

<u>NENÍ to aritmetický repér $\mathcal{P}^2$</u>

Def (Projektivní souřadnice): Nechť $\mathcal{P}^n = (P, \mathbb{V}^{n+1}, \Pi)$ je projektivní prostor nad T a $\mathcal{E} = \{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ je aritmetický repér $\mathcal{P}^n$, a $X = \Pi(\bar{x}) \in P$. Jestliže

$$\bar{x} = x_0 \bar{e}_0 + x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n ,$$

pak uspořádanou $(n+1)$-tici $X_{\langle \mathcal{E} \rangle} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in T^{n+1}$ nazveme projektivními souřadnicemi bodu X vzhledem k aritmetickému repéru $\mathcal{E}$.

Poznámka: Projektivní souřadnice bodu $X = \Pi(\bar{x}) \in P$ jsou tedy vlastně souřadnice vektoru $\bar{x}$ vzhledem k bázi $\mathcal{E}$ vekt. prostoru $\mathbb{V}^{n+1}$. Ty jsou určeny jednoznačně, ale na bod X se zobrazují i všechny nenulové násobky vektoru $\bar{x}$ (a nic jiného $\Pi(\bar{x}) = \Pi(\bar{y}) \Leftrightarrow \langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{y} \rangle$)

$\Rightarrow$ Projektivní souřadnice jsou určeny jednoznačně až na násobek.

Př: Určete projektivní souřadnice bodu $X = \Pi((1,2,3))$ projektivního prostoru $\mathcal{P}^2 = (P, \mathbb{R}^3, \Pi)$ vzhledem k aritmetickému repéru $\mathcal{E}$.

a) $\mathcal{E} = \{(1,1,1); (0,1,1); (0,2,3)\}$ $\Rightarrow$ $k_1(1,1,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,2,3) = (1,2,3) \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 = 1 \\ \Rightarrow k_2 = -1 \\ \Rightarrow k_3 = 1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \underline{\underline{X_{\langle \mathcal{E} \rangle} = (1,-1,1)}}$$

protože $X = \Pi((1,2,3)) = \Pi(r \cdot (1,2,3))$ a $r \cdot (1,2,3) = r \cdot (1) \cdot (1,1,1) + r(-1)(0,1,1) + r(1)(0,2,3) \Rightarrow$

$X_{\langle \mathcal{E} \rangle} = (r, -r, r)$ jsou také projektivními souřadnicemi X ať za r dosadíme libovolné nenulové číslo (prvek T).

b) $\mathcal{E} = \{(1,1,1); (0,1,1); (0,0,1)\}$

Pozor! nejedná se o rovnost uspořádaných trojic! nerozlišujeme násobky

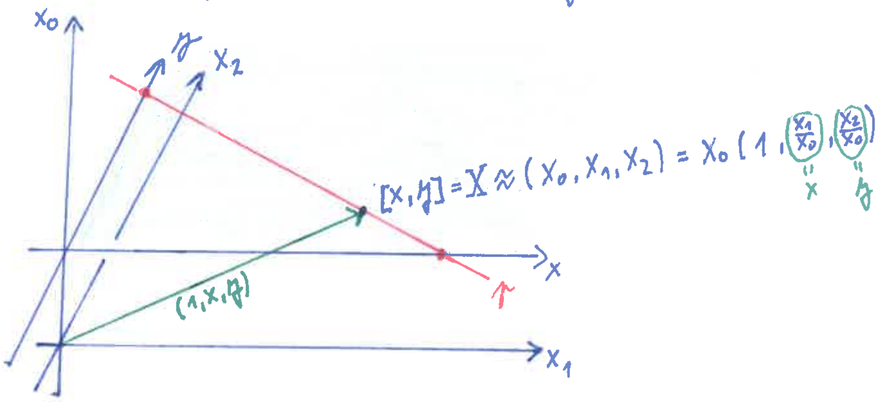
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 = 1 \\ \Rightarrow k_2 = 1 \\ \Rightarrow k_3 = 1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow X_{\langle \mathcal{E} \rangle} = (1,1,1) = (5,5,5) = (\pi, \pi, \pi)$$

(pokud $T = \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ **Dohoda:** Budeme zapisovat: $X_{\langle \mathcal{E} \rangle} = r(1,1,1)$, $r \in T - \{0\}$

Přímka v projektivním prostoru

Uvažujme přímku p v rovině $\mathbb{R}^2$, která je dána rovnicí $ax+by+c=0$



Bod $X=[x,y]$ odpovídá vlastnímu (tj. $x_0\neq 0$) bodu projektivní roviny s projektivními souřadnicemi (x_0,x_1,x_2), kde $x=\frac{x_1}{x_0}$ $y=\frac{x_2}{x_0}$. Dosazením do rovnice přímky p obdržíme:

$$a\frac{x_1}{x_0}+b\frac{x_2}{x_0}+c=0 \qquad /\cdot x_0\neq 0$$

$$a x_1+b x_2+c x_0=0 \qquad (*)$$

rovnice přímky p v projektivním rozšíření afinní roviny

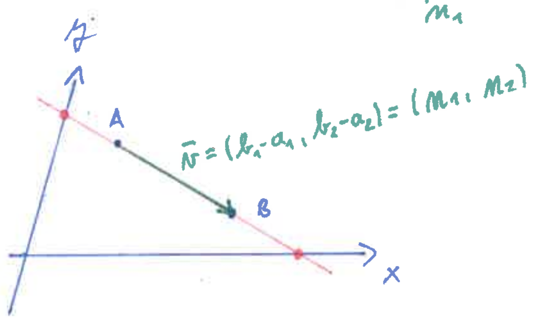
Uvažujme, které nevlastní body (tj. $x_0=0$) splňují rovnici (*). Řekněme, že $N=(0,n_1,n_2)$ splňuje (*) $\Rightarrow$

$$a n_1-b n_1+0=0$$

Předpokládejme, že $A,B\in p$, $A=[a_1,a_2]$, $B=[b_1,b_2]$ $\Rightarrow$

$$a a_1+b a_2+c=0$$
$$a b_1+b b_2+c=0 \qquad / \text{ odečteme první rovnici}$$

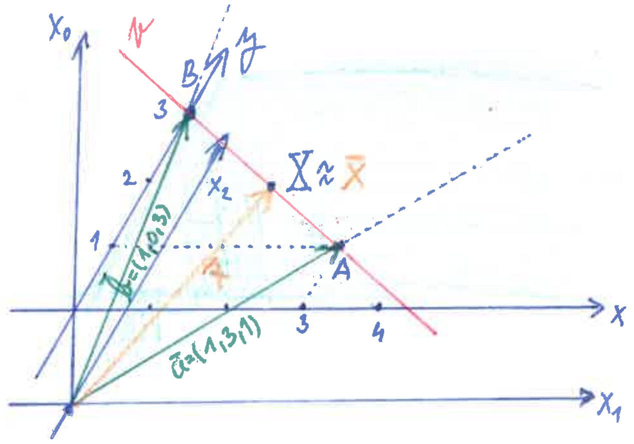
$$a(\underbrace{b_1-a_1}_{n_1})+b(\underbrace{b_2-a_2}_{n_2})=0$$



$\Rightarrow$ Rovnici (*) vyhovují vlastní body projektivní roviny odpovídající bodům roviny $\mathbb{R}^2$, ale i (jeden) nevlastní bod projektivní roviny, který odpovídá směru přímky p. $\Rightarrow$ K vlastním bodům jsme přidali nevlastní body $\Rightarrow$ rozšířili jsme afinní rovinu o nevlastní body.

Př. Určete param. rovnice přímky p, která je dána dvěma body A, B (určených jejich projektivními souřadnicemi).

$A = (1,3,1)$; $B = (1,0,3)$



$$X = \underbrace{\lambda_1(1,3,1) + \lambda_2(1,0,3)}$$

vektor $\bar{X}$ je lineární kombinací vektorů $\bar{a}$ a $\bar{b}$ $\Rightarrow$ projektivní souřadnice bodu $X \in p$ jsou lineární kombinací projektivních souřadnic A a B.

$$\Rightarrow p: \quad X = \lambda_1(1,3,1) + \lambda_2(1,0,3)$$

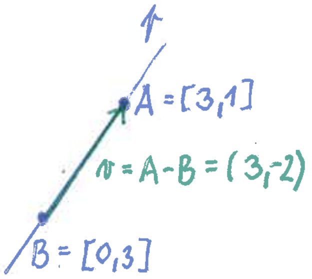
$$X = (\underbrace{\lambda_1+\lambda_2}_{1}, \underbrace{3\lambda_1}_{x}, \underbrace{\lambda_1+3\lambda_2}_{y})$$

$$1 \Rightarrow x \; ; \; y$$

$\lambda_1+\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1-\lambda_1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3\lambda_1 \\ y &= \lambda_1 + 3\lambda_2 = \lambda_1 + 3(1-\lambda_1) = 3 - 2\lambda_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p: \begin{aligned} x &= 0 + 3\lambda_1 \\ y &= 3 - 2\lambda_1 \end{aligned}$$

Všimněme si, že $A = (1,3,1) = [3,1]$ a $B = (1,0,3) = [0,3]$. Mohli bychom proto určit parametrické rovnice p obvyklým způsobem:



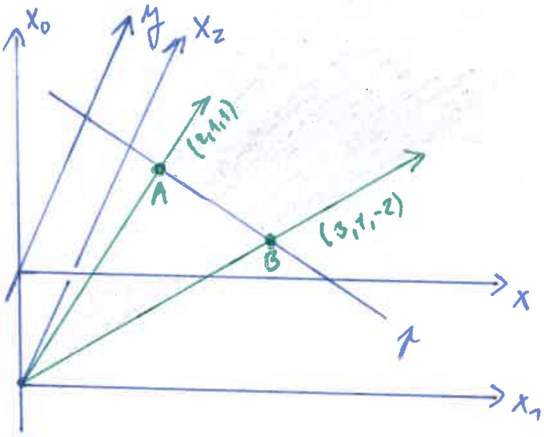
$\Rightarrow p: \quad X = B + \lambda \cdot \vec{v}$ ... vektorová rovnice

$$p: \left.\begin{aligned} x &= 0 + 3\lambda \\ y &= 3 - 2\lambda \end{aligned}\right\} \ldots \text{parametrické rovnice}$$

Př. Přímka p je v projektivním prostoru $(P, \mathbb{R}^3, \Pi)$, kde $\Pi(\bar{x}) = \langle \bar{x} \rangle$ dána rovnicí:

$$p: \quad X = \lambda_1 (3, 1, -2) + \lambda_2 (2, 1, 1)$$

a) Určete nevlastní bod přímky p.



$$X = (3\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, -2\lambda_1 + \lambda_2)$$

Chceme určit bod $X = N = (0, n_1, n_2) \Rightarrow$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad / \text{zvolíme parametr } \lambda_2 = 3t$$
$$3\lambda_1 + 6t = 0$$
$$\lambda_1 = -2t$$

$\Rightarrow \quad N = (0, -2t + 3t, +4t + 3t) = (0, t, 7t) = \underline{\underline{t(0,1,7)}}, \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$

($\Leftrightarrow$ směrový vektor přímky p je $\bar{v} = (1,7)$)

b) Určete obecnou rovnici přímky p

$$p: \quad ax + by + c = 0 \qquad / \; x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0}$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 \qquad / \text{víme, že } (0,1,7); (3,1,-2); (2,1,1) \in p \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a + 7b &= 0 \\ a - 2b + 3c &= 0 \\ a + b + 2c &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :3 \\ -\frac{2}{3}r_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -3b + c = 0 \quad / \; b = t^{\epsilon} \Rightarrow c = 3t \qquad \Rightarrow (a, b, c) = (-7t, t, 3t) \neq (0,0,0)$

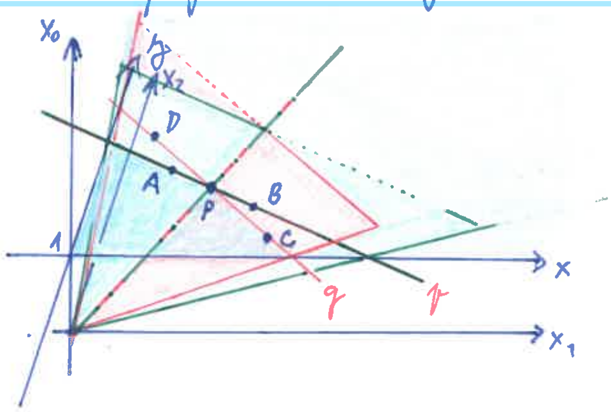
$\Rightarrow \quad a + 7t = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -7t \qquad \Rightarrow t \in \mathbb{R} - \{0\}$

jinak by to nebyla rovnice přímky!

$\Rightarrow \quad p: \quad -7t x_1 + t x_2 + 3t x_0 = 0 \qquad / : t \neq 0$

$$\underbrace{\underline{\underline{p: \; -7x_1 + x_2 + 3x_0 = 0}}}_{\text{v proj. rovině}} \qquad \underbrace{\underline{\underline{p: \; -7x + y + 3 = 0}}}_{\text{v afinní rovině}}$$

Př. Určete projektivní i afinní souřadnice průsečíku P přímek p a q, kde p je dána body $A=(4,-1,1)$ a $B=(1,-1,0)$ a q je dána body $C=(-2,4,1)$ a $D=(3,-2,0)$.



$$P = x_1\underbrace{(4,-1,1)}_{A} + x_2\underbrace{(1,-1,0)}_{B} \quad / \text{protože } P \in p$$

$$P = x_3\underbrace{(-2,4,1)}_{C} + x_4\underbrace{(3,-2,0)}_{D} \quad / \text{protože } P \in q$$

$$P = P$$

$$x_1(4,-1,1) + x_2(1,-1,0) = x_3(-2,4,1) + x_4(3,-2,0)$$

$$(4x_1 + x_2,\ -x_1 - x_2,\ x_1) = (-2x_3 + 3x_4,\ 4x_3 - 2x_4,\ x_3)$$

$\Rightarrow$ Dostáváme soustavu 3 rovnic o 4 neznámých:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= -2x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - x_2 &= 4x_3 - 2x_4 \\ x_1 &= x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad - x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ -4r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 - x_4 = 0 \quad / \ \underline{x_4 = s} \qquad\qquad -x_2 - 5s + 2s = 0 \qquad\qquad x_1 - s = 0$$

$$x_3 - s = 0 \qquad\qquad -x_2 - 3s = 0 \qquad\qquad \underline{x_1 = s}$$

$$\underline{x_3 = s} \qquad\qquad \underline{x_2 = -3s}$$

$\Rightarrow P = x_1(4,-1,1) + x_2(1,-1,0) = s(4,-1,1) - 3s(1,-1,0) = (s, 2s, s) = s(1,2,1)$

(nebo: $P = x_3(-2,4,1) + x_4(3,-2,0) = s(-2,4,1) + s(3,-2,0) = (s, 2s, s)$)

$$\Rightarrow \underline{\underline{P = (1,2,1) = [2,1]}}$$

Fanova rovina

Je to projektivní prostor $\mathcal{P}^3 = (P, \mathbb{V}^3, \Pi)$, kde
$\mathbb{V}^3 = (\mathbb{Z}_2^3, +, \cdot)$, $\Pi(\bar{x}) = \langle \bar{x} \rangle$, $P = \{ \langle \bar{x} \rangle \mid \bar{x} \in \mathbb{Z}_2^3 - \{\bar{o}\} \} = H(\Pi)$

Nejprve určíme množinu bodů tzv. projektivní roviny (tj. P). Určíme všechny jednosměry:

např.: $\langle (0,0,0) \rangle = \{ k(0,0,0) \mid k \in \mathbb{Z}_2 \} = \{ 1\cdot(0,0,0) ; 0\cdot(0,0,0) \} = \{(0,0,0)\}$ ale $\langle(0,0,0)\rangle \notin P$!!!

ale: $\langle (1,0,0) \rangle = \{ k(1,0,0) \mid k \in \mathbb{Z}_2 \} = \{ 1\cdot(1,0,0) ; 0(1,0,0) \} = \{(1,0,0) ; (0,0,0)\}$

$\langle (0,1,0) \rangle = \{ (0,1,0) ; (0,0,0) \}$

$\langle (0,0,1) \rangle = \{ (0,0,1) ; (0,0,0) \}$

$\langle (0,1,1) \rangle = \{ (0,1,1) ; (0,0,0) \}$

$\langle (1,0,1) \rangle = \{ (1,0,1) ; (0,0,0) \}$

$\langle (1,1,0) \rangle = \{ (1,1,0) ; (0,0,0) \}$

$\langle (1,1,1) \rangle = \{ (1,1,1) ; (0,0,0) \}$

$\Rightarrow$ Projektivními souřadnicemi bodu $\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle$ je usp. trojice $[x_1,x_2,x_3]$ (vzhledem k $S = \{(1,0,0) ; (0,1,0) ; (0,0,1)\}$).

Obecně: přímka AB v projektivním prostoru má rovnici:

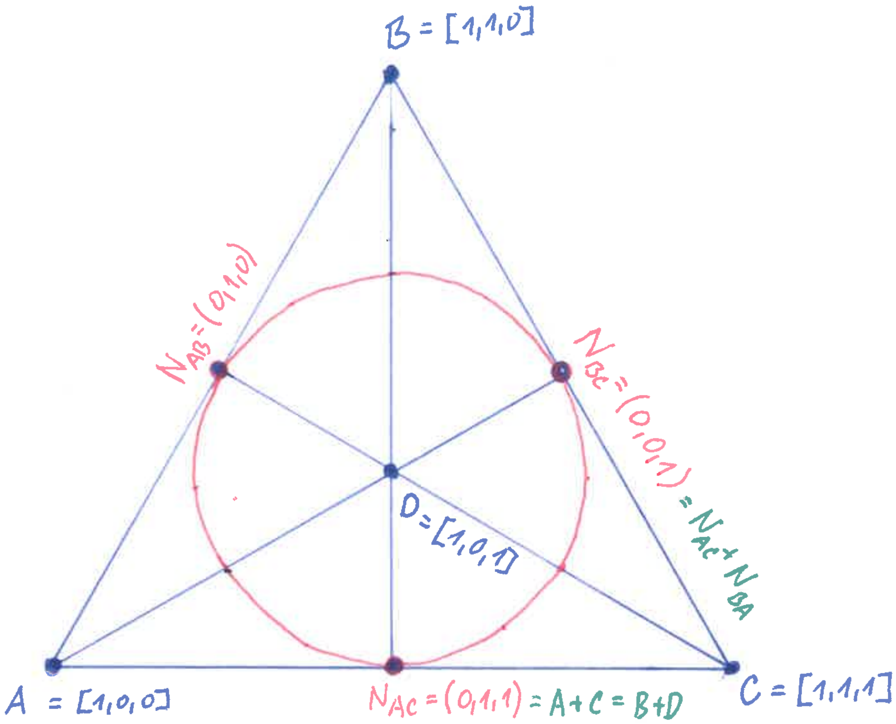
$$X_{\langle S \rangle} = \lambda_1 A_{\langle S \rangle} + \lambda_2 B_{\langle S \rangle} \quad , \text{ kde } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$$

Zvolme $A = \langle(1,0,0)\rangle$, $B = \langle(1,1,0)\rangle$ $\Rightarrow$ Body $X \in AB$ jsou:

$$X = \begin{cases} 1\cdot[1,0,0] + 1\cdot[1,1,0] = [2,1,0] = [0,1,0] = N_{AB} = A+B = (0,1,0) \\ 1\cdot[1,0,0] + 0\cdot[1,1,0] = [1,0,0] \\ 0\cdot[1,0,1] + 1\cdot[1,1,0] = [1,1,0] \end{cases}$$

nevlastní bod přímky AB = směr "přímky AB"

$\Rightarrow AB = \{ [0,1,0] ; [1,0,0] ; [1,1,0] \}$



Umístíme $A=[1,0,0]$, $B=[1,1,0]$; $C=[1,1,1]$ do vrcholu a $D=[1,0,1]$ do těžiště.

$$N_{AB} = 1\cdot A + 1\cdot B = [1,0,0] + [1,1,0] = (0,1,0) = C+D = [1,1,1] + [1,0,1]$$

$$N_{BC} = 1\cdot B + 1\cdot C = [1,1,0] + [1,1,1] = (0,0,1) = A+D = [1,0,0] + [1,0,1]$$

$$N_{AC} = 1\cdot A + 1\cdot C = [1,0,0] + [1,1,1] = (0,1,1) = B+D = [1,1,0] + [1,0,1]$$

$\Rightarrow$ Přímky Fanovy roviny sestávají vždy ze tří bodů, jsou umístěny na stranách a na těžnicích trojúhelníku ABC. Navíc Fanova rovina obsahuje i nevlastní přímku sestávající z nevlastních bodů $[0,1,0]$; $[0,0,1]$ a $[0,1,1]$.

$\Rightarrow$ Celkem 7 přímek a 7 bodů – Je to nejmenší projektivní rovina.