1. Př. Sečtěte komplexní čísla:

a) $(2-3i)+(5+7i) = 7+4i$

b) $(3+8i)+(2-3i) = 5+5i$

c) $(-2+3i)+(6-2i) = 4+i$

obecně: $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

2. Př. Vynásobte komplexní čísla:

a) $(2-3i)\cdot(5+7i) = 10-21\underbrace{i^2}_{=-1}+14i-15i = 10+21-i = 31-i$

b) $(3+8i)\cdot(2-3i) = 6-24i^2+16i-9i = 6+24+7i = 30+7i$

c) $(-2+3i)\cdot(6-2i) = -12-6i^2+18i+4i = -12+6+22i = -6+22i$

Roznásobujeme jak jsme zvyklí, jen pamatujeme na to, že $i^2=-1$.

obecně: $(a+bi)\cdot(c+di) = ac-bd+(bc+ad)i$

3. Př. Převeďte na algebraický tvar.

a) $\frac{1}{2+5i} = \frac{1}{(2+5i)}\cdot\frac{(2-5i)}{(2-5i)} = \frac{2-5i}{4-10i+10i-25i^2} = \frac{2-5i}{4+25} = \frac{2-5i}{29} = \underline{\underline{\frac{2}{29}-\frac{5}{29}i}}$

b) $\frac{3+2i}{4-i} = \frac{(3+2i)}{(4-i)}\cdot\frac{(4+i)}{(4+i)} = \frac{12-2+(8+3)i}{16-4i+4i-i^2} = \frac{10+11i}{16+1} = \underline{\underline{\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i}}$

c) $(3-5i)^2 = 3^2-30i+25i^2 = 9-30i-25 = \underline{\underline{-16-30i}}$

d) $(3+i)^3 = 3^3+3\cdot3^2\cdot i+3\cdot3\cdot i^2+\underbrace{i^3}_{=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i} = 27+27i-9-i = \underline{\underline{18+26i}}$

e) $i^4 = i^2\cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1 = \underline{\underline{1+0i}}$

f) $\underbrace{i^{537} = i^{533+4} = i^{533}\cdot \overset{1}{i^4} = i^{533}}_{\text{v mocnině } i \text{ mohu odečítat násobky 4}} = i^{33} = i^5 = i = \underline{\underline{0+1i}}$

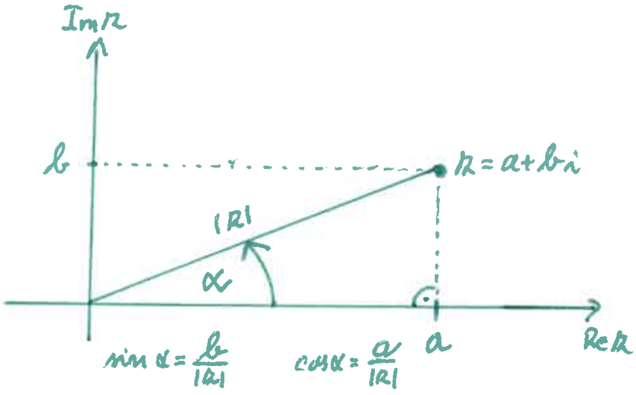
4. Př. Převeďte na goniometrický tvar.

obecně: $z = a + bi$ ... znázorníme jako bod $[a, b]$:

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ... modul z = vzdálenost z od počátku

α .... viz obrázek =>

$$z = a + bi = \underbrace{|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}_{\text{goniometrický tvar } z}$$

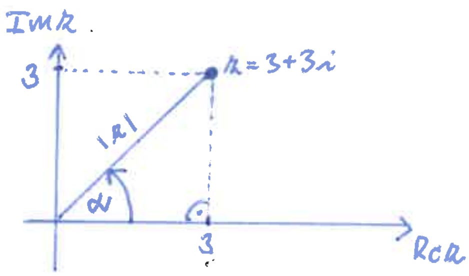


a) $z = 3 + 3i$

$|z| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{2\cdot 9} = 3\cdot\sqrt{2}$

$\alpha = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ ... jasné z obrázku

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

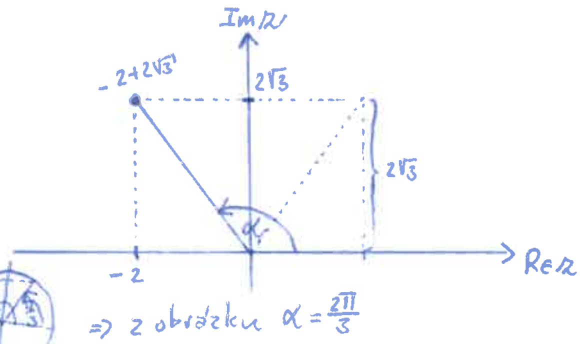


b) $z = \overset{a}{-2} + \overset{b}{2\sqrt{3}}\,i$

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

α ... z obrázku neodhadneme => určíme např.:

$\sin\alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ => $\alpha = \frac{\pi}{3}$ nebo $\frac{2\pi}{3}$



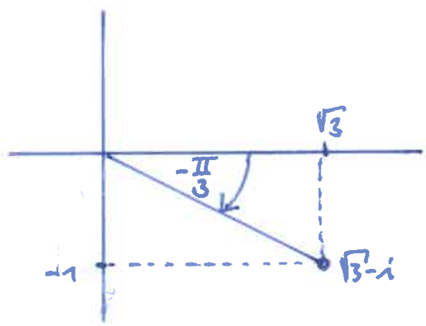
=> z obrázku $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

c) $z = \sqrt{3} - i$

$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ => $\alpha = \frac{\pi}{6}$ nebo? $-\frac{\pi}{6}$



$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

5. Př. Vynásobte komplexní čísla.

obecně: $z_1 = |z_1| (\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1)$; $z_2 = |z_2| (\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2)$ $\Rightarrow$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i \sin(\alpha_1+\alpha_2) \right)$$

a) $z_1 = 3(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$

$$z_1 \cdot z_2 = \underline{\underline{6(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}}$$

b) $z_1 = 4(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$, $z_2 = 3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$

$$z_1 \cdot z_2 = 12(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$$

6. Př. Umocněte komplexní číslo.

obecně: $z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ $\Rightarrow$ $z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$

a) $z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ $\Rightarrow$

$z^2 = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

$z^3 = 8(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

$z^4 = 16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

b) $z = 3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ $\Rightarrow$

$z^6 = 3^6(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

c) $z = 1+i$ $\Rightarrow$ $z^3 = ?$

$z = (1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow z^3 = (\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$z^3 = 2\sqrt{3}\left(\underbrace{\cos\frac{3\pi}{4}}_{=} + i \underbrace{\sin\frac{3\pi}{4}}_{=}\right)$

$z^3 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\underline{\underline{z^3 = -\sqrt{6} + i\sqrt{6}}}$

6. Př. Určete $\sqrt[2]{z}$, $\sqrt[3]{z}$ a $\sqrt[4]{z}$.

obecně: Každé nenulové komplexní číslo $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ má n různých n-tých odmocnin. Jsou to:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} z_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right) \\ z_1 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ z_2 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ z_{n-1} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right) \end{cases}$$

a) $z = 81(\cos 120° + i\sin 120°)$

$$\sqrt[2]{z} = \begin{cases} 9(\cos 60° + i\sin 60°) = z_0 \\ 9(\cos 240° + i\sin 240°) = z_1 \end{cases}$$

.... k úhlu přičítám $\frac{2\pi}{2} = 180°$

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{81}(\cos 40° + i\sin 40°) = z_0 \\ \sqrt[3]{81}(\cos 160° + i\sin 160°) = z_1 \\ \sqrt[3]{81}(\cos 280° + i\sin 280°) = z_2 \end{cases}$$

... k úhlu přičítám $\frac{2\pi}{3} = 120°$

$$\sqrt[4]{z} = \begin{cases} 3(\cos 30° + i\sin 30°) = z_0 \\ 3(\cos 120° + i\sin 120°) = z_1 \\ 3(\cos 210° + i\sin 210°) = z_2 \\ 4(\cos 300° + i\sin 300°) = z_3 \end{cases}$$

... k úhlu přičítám $\frac{2\pi}{4} = 90°$

b) $z = 25\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sqrt[2]{z} = \begin{cases} 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ 5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \end{cases}$$

.... k úhlu přičítám $\frac{2\pi}{2} = \pi = \frac{4\pi}{4}$

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{25}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ \sqrt[3]{25}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \\ \sqrt[3]{25}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) \end{cases}$$

... k úhlu přičítám $\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}$

$$\sqrt[4]{z} = \begin{cases} \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) \\ \sqrt{5}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right) \\ \sqrt{5}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right) \\ \sqrt{5}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right) \end{cases}$$

... přičítám $\frac{2\pi}{4} = \frac{4\pi}{8}$