Reálné funkce jedné reálné proměnné

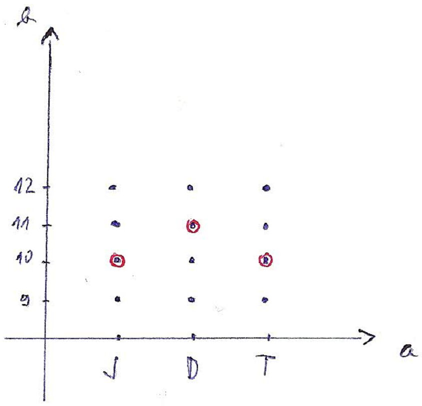
Def (Kartézský součin): Kartézským součinem množin A a B nazveme množinu

$$A \times B = \{ \underbrace{(a,b)}_{\text{uspořádaná dvojice}} \mid a \in A,\ b \in B \}$$

Př: $A = \{$ Josef, David, Tonda $\}$, $B = \{ 9, 10, 11, 12 \}$ (čísla bot)

$\Rightarrow A \times B = \{$ (Josef, 9); (Josef, 10); (Josef, 11); (Josef, 12); (David, 9); ..... ; (Tonda, 12) $\}$

Grafické znázornění:



Def (Relace): Binární relací prvků množiny A a B nazveme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$.
Jestliže $(a,b) \in R$, pak píšeme aRb, nebo $R(a) = b$.

Př: Relací může být „míti číslo bot". Tonda má číslo bot 10, David 11, Josef 10.
Tzn. $R = \{$ (Tonda, 10); (David, 11); (Josef 10) $\}$

Def: (Obor hodnot, definiční obor): Definičním oborem relace $R \subseteq A \times B$ nazveme množinu

$$D_R = \{ a \in A \mid \exists b \in B : R(a) = b \}$$

Oborem hodnot relace $R \subseteq A \times B$ nazveme množinu

$$H_R = \{ b \in B \mid \exists a \in A : R(a) = b \}$$

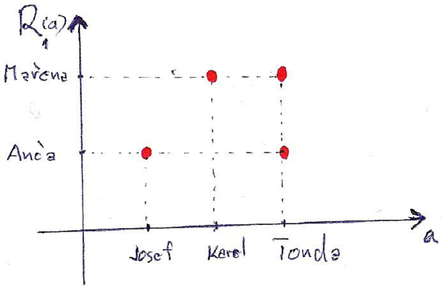
Př: $R = \{ (1,3); (1,6); (2,0); (3,2) \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $D_R = \{1,2,3\}$
$H_R = \{3,6,0,2\}$

Def (Zobrazení): Zobrazením z množiny A do množiny B nazveme libovolnou relaci $R \subseteq A \times B$ splňující podmínku

$$\forall a \in D_R \ \exists! b \in B : R(a) = b$$

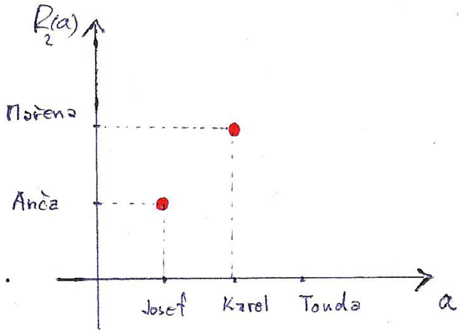
Značíme $R : A \to B$.

Př



relace R_1... být v milostném poměru

$\Rightarrow$ <u>R_1 není zobrazení</u>



Relace R_2 ... být ženat s

$\Rightarrow$ <u>R_2 je zobrazení</u> (Značíme $R_2 : A \to B$)

$A = \{Josef, Karel, Tonda\}$

$B = \{Anča, Mařena\}$

Def (Funkce): Reálnou funkcí jedné reálné proměnné nazveme každé zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Př: $f = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ je funkce, která každému reálnému číslu x přiřazuje číslo 2x. Značíme: $f(x) = 2x$ (předpis)

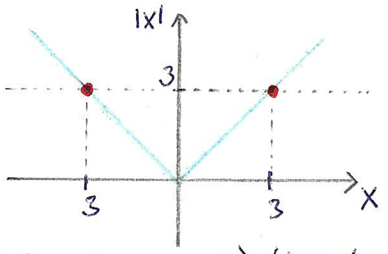
($g = \{(x, 2x) \mid x \in (0,1)\}$ má stejný předpis, ale jiný def. obor $\Rightarrow$ je to jiná funkce)

Úmluva: Funkce je zadána svým definičním oborem a předpisem, který každému prvku definičního oboru přiřadí jeho (právě jednu) hodnotu.
Často budeme funkci zadávat pouze předpisem; v takovém případě jejím definičním oborem rozumíme množinu všech reálných čísel, pro něž má daný předpis smysl.

Př: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Př: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující dané rovnice a nerovnice.



1.) $|x| = 3$

a) $\underline{|x \in (-\infty, 0)|}$ $\Rightarrow$ $|x| = -x$ (př. $|-3| = -(-3) = 3$)

$|x| = 3$

$-x = 3$

$\underline{\underline{x = -3}}$

b.) $\underline{|x \in \langle 0, \infty)|}$ $\Rightarrow$ $|x| = x$ (př. $|5| = 5$)

$|x| = 3$

$\underline{\underline{x = 3}}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in \{-3, 3\}}}$

2.) $|x| > 3$

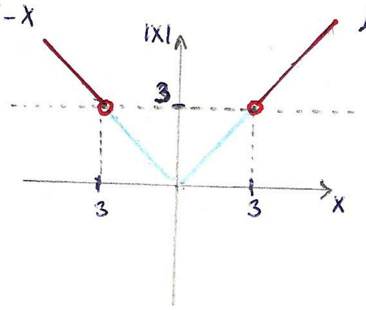
a) $\underline{|x \in (-\infty, 0)|}$ $\Rightarrow$ $|x| = -x$

$|x| > 3$

$-x > 3 \quad (-1)$

$x < -3$

$\underline{x \in (-\infty, -3)}$



b) $\underline{|x \in \langle 0, \infty)|}$ $\Rightarrow$ $|x| = x$

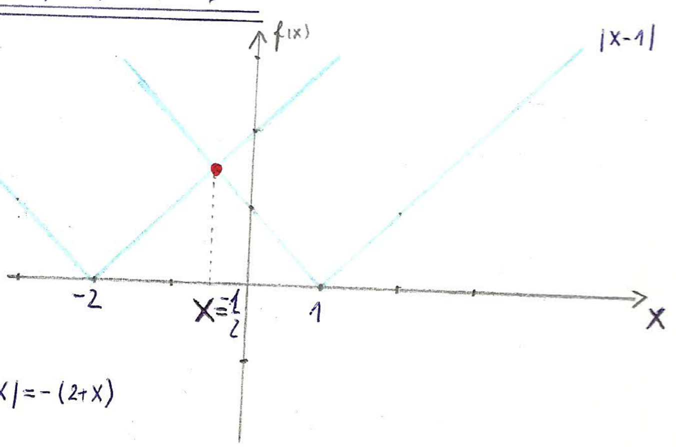
$|x| > 3$

$x > 3$

$\underline{x \in (3, \infty)}$

$\underline{\underline{x \in (3, \infty) \cup (-\infty, -3)}}$

3.) $|x-1| = |2+x|$



nulové body:

a) $\underline{|x \in (-\infty, -2)|}$ $\Rightarrow$ $|x-1| = -(x-1)$; $|2+x| = -(2+x)$

$-(x-1) = -(2+x)$

$-x+1 = -x-2$

$1 = -2$

$\Downarrow$

v intervalu $(-\infty, -2)$ rovnice nemá řešení

b) $\underline{|x \in \langle -2, 1)|}$ $\Rightarrow$ $|x-1| = -(x-1)$

$|2+x| = 2+x$

$-(x-1) = 2+x$

$-x+1 = 2+x$

$-2x = 1$

$\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$

c) $\underline{|x \in \langle 1, \infty)|}$ $\Rightarrow$ $|x-1| = x-1$

$|2+x| = 2+x$

$x-1 = 2+x$

$-1 = 2$

v intervalu $\langle 1, \infty)$ rovnice nemá řešení

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$

4.) $|2x-6|-3 \geq -2|x-2|+1$

Nulové body:

$2x-6=0 \iff x=3$

$x-2=0 \iff x=2$

a) $\boxed{x \in (-\infty, 2)} \Rightarrow |2x-6| = -(2x-6)$

$|x-2| = -(x-2)$

$$-(2x-6)-3 \geq 2(x-2)+1$$

$$-2x+6-3 \geq 2x-4+1$$

$$-2x+3 \geq 2x-3$$

$$-4x \geq -6$$

$$x \leq \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \Rightarrow \underline{x \in (-\infty, \tfrac{3}{2}\rangle \cap (-\infty, 2) = (-\infty, \tfrac{3}{2}\rangle}$$

b) $\boxed{x \in \langle 2, 3)} \Rightarrow |2x-6| = -(2x-6)$

$|x-2| = x-2$

$$-(2x-6)-3 \geq -2(x-2)+1$$

$$-2x+6-3 \geq -2x+4+1$$

$3 \geq 5 \quad \Rightarrow$ <u>Nerovnici nesplňuje ani jedno x z intervalu $\langle 2,3)$</u>

c) $\boxed{x \in \langle 3, \infty)} \Rightarrow |2x-6| = 2x-6$

$|x-2| = x-2$

$$2x-6-3 \geq -2(x-2)+1$$

$$2x-9 \geq -2x+5$$

$$4x-9 \geq 5$$

$$4x \geq 14$$

$$x \geq \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \qquad \Rightarrow \underline{x \in (\tfrac{7}{2}, \infty) \cap \langle 3, \infty) = \langle \tfrac{7}{2}, \infty)}$$

$\Rightarrow$ Nerovnice je splněna pro libovolné $\underline{x \in (-\infty, \tfrac{3}{2}\rangle \cup \langle \tfrac{7}{2}, \infty)}$

Př: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující dané rovnice a nerovnice

1.) $2(x-1) + |2x-1| = 3 + |3x-6|$

$2x-1=0$ $\quad$ $3x-6=0$

$2x=1$ $\quad$ $3x=6$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad$ $x=2$

Nulové body:

a) $\boxed{x \in (-\infty, \frac{1}{2})} \Rightarrow |2x-1| = -(2x-1)$
$|3x-6| = -(3x-6)$ (dosadíme např. $x=0$ $\Rightarrow$ $2x-1 = -1 < 0$, $3x-6 = -6 < 0$)

$2(x-1) - (2x-1) = 3 - (3x-6)$

$2x-2 -2x+1 = 3-3x+6$

$-1 = -3x+9$

$3x = 10$

$x = \frac{10}{3} = 3+\frac{1}{3} \notin (-\infty, \frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ rovnice nemá v intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ řešení!

b) $\boxed{x \in \langle \frac{1}{2}, 2)} \Rightarrow |2x-1| = (2x-1)$
$|3x-6| = -(3x-6)$

$2(x-1) + (2x-1) = 3 - (3x-6)$

$2x-2+2x-1 = 3-3x+6$

$4x-3 = 9-3x$

$7x = 12$

$x = \frac{12}{7} \in \langle \frac{1}{2}, 2)$ (je řešením rovnice)

c) $\boxed{x \in \langle 2, \infty)} \Rightarrow |2x-1| = 2x-1$
$|3x-6| = 3x-6$

$2(x-1) + (2x-1) = 3+3x-6$

$2x-2+2x-1 = 3x-3$

$4x-3 = 3x-3$

$x = 0 \notin \langle 2, \infty)$ $\Rightarrow$ rovnice nemá v intervalu $\langle 2, \infty)$ řešení

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = \frac{12}{7}}}$ (Je jediné řešení zadané rovnice)

2) $3|2x-6|+4|x| \geq x-|x+1|$

$2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$
$x=0 \Leftrightarrow x=0$
$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Nulové body:

a) $\underline{|x \in (-\infty,-1)|}$
$|2x-6| = -(2x-6)$
$|x| = -x$
$|x+1| = -(x+1)$

$-3(2x-6)-4x \geq x+(x+1)$
$-6x+18-4x \geq 2x+1$
$-12x \geq -17$
$x \leq \frac{17}{12} = 1+\frac{5}{12}$ $\Rightarrow$ to splňují $\underline{\text{všechna } x \in (-\infty,-1)}$

b) $\underline{|x \in \langle -1,0)|}$
$|2x-6| = -(2x-6)$
$|x| = -x$
$|x+1| = x+1$

$-3(2x-6)-4x \geq x-(x+1)$
$-6x+18-4x \geq x-x-1$
$-10x \geq -19 \quad |:(-10)$
$x \leq \frac{19}{10}$ $\Rightarrow$ to splňují $\underline{\text{všechna } x \in \langle -1,0)}$

c) $\underline{|x \in \langle 0,3)|}$ $\Rightarrow$
$|2x-6| = -(2x-6)$
$|x| = x$
$|x+1| = x+1$

$-3(2x-6)+4x \geq x-(x+1)$
$-6x+18+4x \geq -1$
$-2x \geq -19$
$x \leq \frac{19}{2} = 9+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ to splňují $\underline{\text{všechna } x \in \langle 0,3)}$

d) $\underline{|x \in \langle 3,\infty)|}$ $|2x-6| = 2x-6$; $|x| = x$; $|x+1| = x+1$

$3(2x-6)+4x \geq x-(x+1)$
$6x-18+4x \geq -1$
$10x \geq 17$
$x \geq \frac{17}{10} = 1{,}7$ $\Rightarrow$ to splňují $\underline{\text{všechna } x \in \langle 3,\infty)}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty,-1) \cup \langle -1,0) \cup \langle 0,3) \cup \langle 3,\infty) = \mathbb{R}}}$ (Nerovnost platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}$)

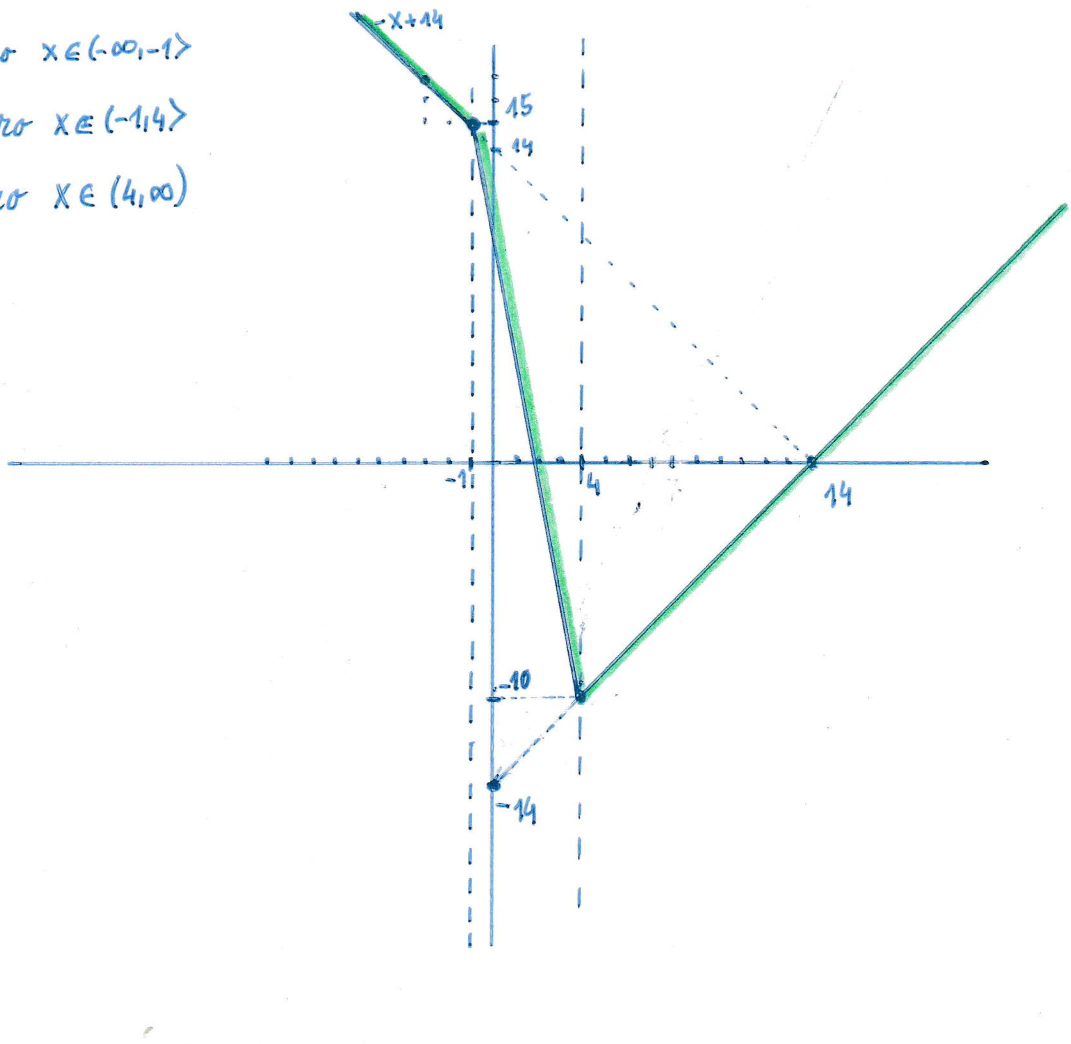
Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $3|x-4| - 2|x+1| \geq 0$.

$x \in (-\infty, -1\rangle$	$x \in (-1, 4\rangle$	$x \in (4, \infty)$
$\lvert x-4\rvert = -(x-4)$ $\lvert x+1\rvert = -(x+1)$	$\lvert x-4\rvert = -(x-4)$ $\lvert x+1\rvert = x+1$	$\lvert x-4\rvert = x-4$ $\lvert x+1\rvert = x+1$
$-3(x-4)+2(x+1) \geq 0$ $-3x+12+2x+2 \geq 0$ $-x+14 \geq 0$ $x \leq 14$	$-3(x-4)-2(x+1) \geq 0$ $-3x+12-2x-2 \geq 0$ $-5x+10 \geq 0$ $5x \leq 10$ $x \leq 2$	$3(x-4)-2(x+1) \geq 0$ $3x-12-2x-2 \geq 0$ $x-14 \geq 0$ $x \geq 14$
$\Rightarrow x \in (-\infty, -1\rangle$	$x \in (-1, 2\rangle$	$x \in \langle 14, \infty)$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -1\rangle \cup (-1, 2\rangle \cup \langle 14, \infty) = \underline{\underline{(-\infty, 2\rangle \cup \langle 14, \infty)}}$

Př. Načrtněte graf funkce $f(x) = 3|x-4| - 2|x+1|$

$$f(x) = \begin{cases} -x+14 & \text{pro } x \in (-\infty, -1\rangle \\ -5x+10 & \text{pro } x \in (-1, 4\rangle \\ x-14 & \text{pro } x \in (4, \infty) \end{cases}$$



Př: Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující: $x^2 + 3|x| + 2 = 0$.

a) $x \in \langle 0, \infty)$ $\Rightarrow$ $|x| = x$ $\Rightarrow$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x+2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \notin \langle 0, \infty) \\ -1 \notin \langle 0, \infty) \end{cases}$$ $\Rightarrow$ v intervalu $\langle 0, \infty)$ jsme řešení nenašli

b) $x \in (-\infty, 0)$ $\Rightarrow$ $|x| = -x$

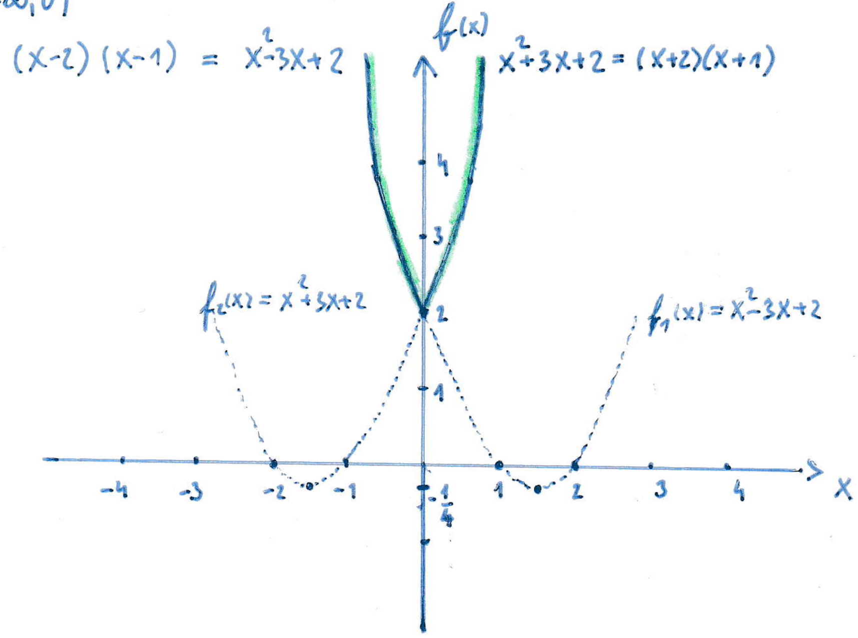
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \notin (-\infty, 0) \\ 1 \in (-\infty, 0) \end{cases}$$ $\Rightarrow$ v intervalu $(-\infty, 0)$ jsme řešení také nenašli

$\Rightarrow$ Zadaná rovnice nemá řešení (v $\mathbb{R}$).

Př: načrtněte graf funkce $f(x) = x^2 + 3|x| + 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{pro } x \in \langle 0, \infty) \\ x^2 - 3x + 2 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



$f(0) = 2$

$f_1\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\,\frac{3}{2} + 2 = \frac{9 - 18 + 8}{4} = -\frac{1}{4}$

$f_2\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{9 - 18 + 8}{4} = -\frac{1}{4}$

(je to sudá funkce)

Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $-x^2 + 2|x+2| - 4 = 0$

a) $x \in \langle -2, \infty) \Rightarrow |x+2| = x+2$

$$-x^2 + 2(x+2) - 4 = 0$$
$$-x^2 + 2x + 4 - 4 = 0$$
$$-x^2 + 2x = 0$$
$$-x(x-2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \underline{\underline{0}} \in \langle -2, \infty) \\ \underline{\underline{2}} \in \langle -2, \infty) \end{cases}$$

b) $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow |x+2| = -(x+2)$

$$-x^2 - 2(x+2) - 4 = 0$$
$$-x^2 - 2x - 4 - 4 = 0$$
$$-x^2 - 2x - 8 = 0 \quad / \cdot (-1)$$
$$x^2 + 2x + 8 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\underbrace{4 - 4 \cdot 8}_{=D}}}{2} \Rightarrow D < 0 \Rightarrow \text{žádné řešení v } \mathbb{R}!$$

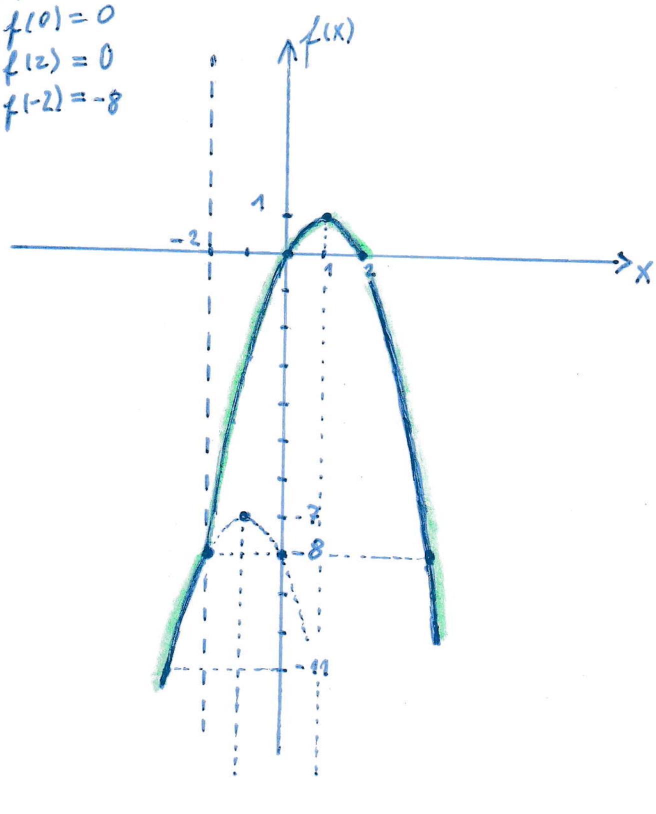
$\Rightarrow$ <u>Všechna řešení rovnice jsou $x = 0$ a $x = 2$.</u>

Př. Načrtněte graf funkce $f(x) = -x^2 + 2|x+2| - 4$

a) pro $x \in \langle -2, \infty)$ je $f(x) = -x^2 + 2(x+2) - 4 = -x^2 + 2x = -x(x-2)$ } $f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f(-2) = -8$

b) pro $x \in (-\infty, -2)$ je $f(x) = -x^2 - 2(x+2) - 4 =$
$$= -x^2 - 2x - 8 =$$
$$= -(x^2 + 2x + 8) =$$
$$= -((x+1)^2 + 7)$$

$\Rightarrow f(-3) = -((-3+1)^2 + 7) = -11$



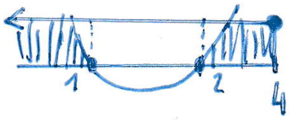
Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $x^2 + 3|x-4| - 10 \geq 0$

$x \in (-\infty, 4\rangle$	$x \in \langle 4, \infty)$
$\lvert x-4\rvert = -(x-4)$	$\lvert x-4\rvert = (x-4)$

$x^2 - 3(x-4) - 10 \geq 0$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$(x-2)(x-1) \geq 0$

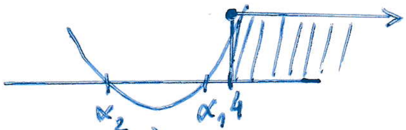


$x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, 4\rangle$

$x^2 + 3(x-4) - 10 \geq 0$

$x^2 + 3x - 22 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+88}}{2} = \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{97}}{2} \doteq 3{,}42 = \alpha_1 \\ \frac{-3-\sqrt{97}}{2} \doteq -6{,}42 = \alpha_2 \end{cases}$$

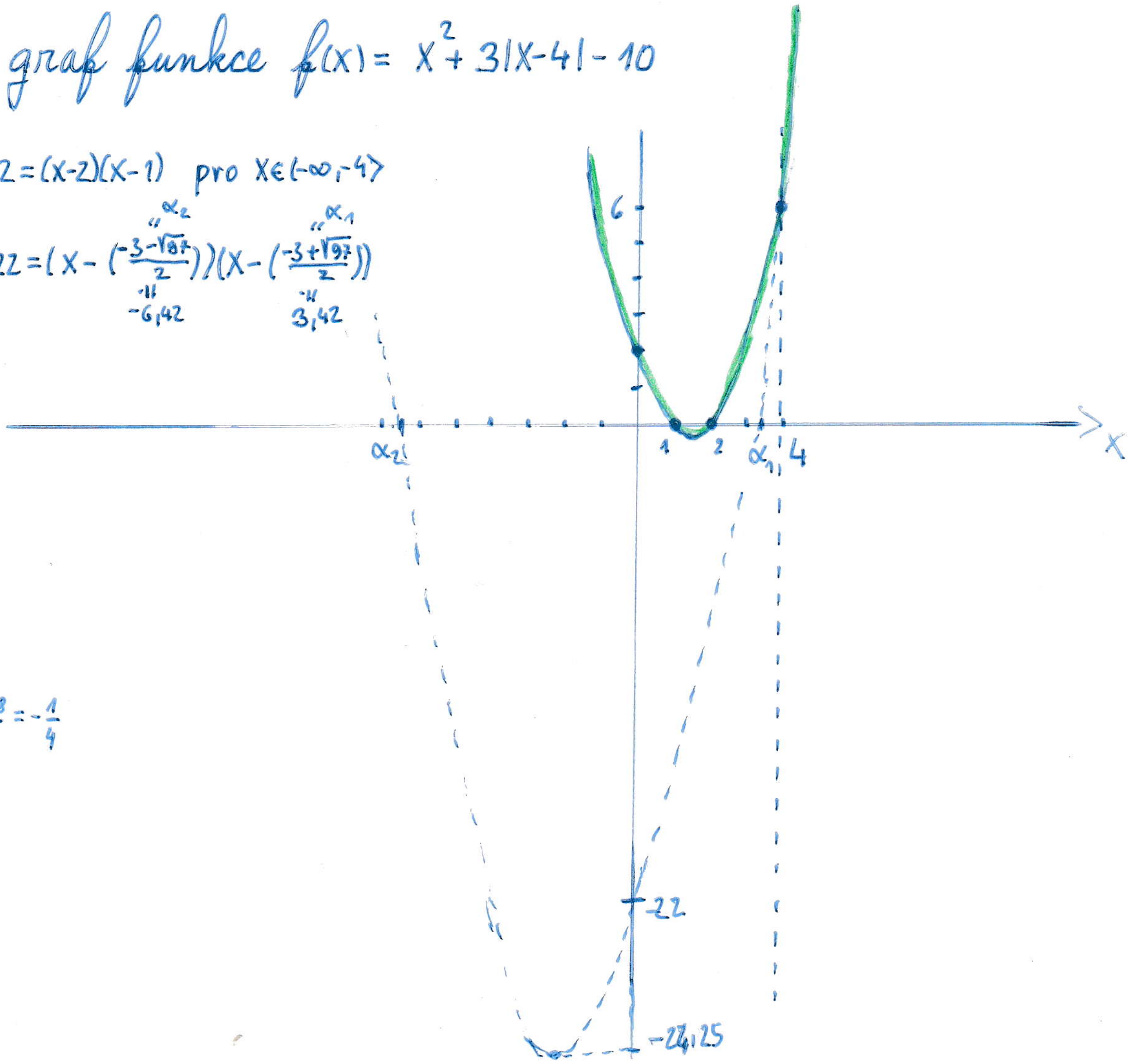


$x \in \langle 4, \infty)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)}}$

Př. Načrtněte graf funkce $f(x) = x^2 + 3|x-4| - 10$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) & \text{pro } x \in (-\infty, 4\rangle \\ x^2 + 3x - 22 = \Big(x - \underbrace{\big(\tfrac{-3-\sqrt{97}}{2}\big)}_{\doteq\, -6{,}42}^{\text{„}\alpha_2\text{"}}\Big)\Big(x - \underbrace{\big(\tfrac{-3+\sqrt{97}}{2}\big)}_{\doteq\, 3{,}42}^{\text{„}\alpha_1\text{"}}\Big) \end{cases}$$



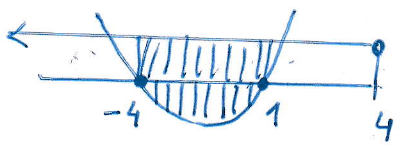
$x^2 + 3x - 22 = -24{,}25$

$f(\tfrac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9-18+8}{4} = -\frac{1}{4}$

Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $-x^2 + 3|x-4| - 8 \geq 0$

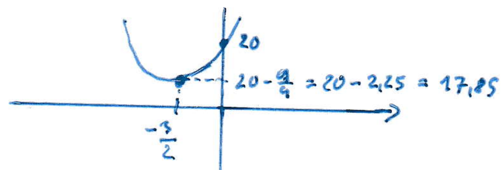
$x \in (-\infty, 4\rangle$	$x \in (4, \infty)$
$\lvert x-4 \rvert = -(x-4)$	$\lvert x-4 \rvert = x-4$

$$-x^2 - 3(x-4) - 8 \geq 0$$
$$-x^2 - 3x + 4 \geq 0 \quad /\cdot(-1)$$
$$x^2 + 3x - 4 \leq 0$$
$$(x+4)(x-1) \leq 0$$



$x \in \langle -4, 1\rangle$

$$-x^2 + 3(x-4) - 8 \geq 0$$
$$-x^2 + 3x - 20 \geq 0$$
$$x^2 - 3x + 20 \leq 0$$
$$\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} + 20 \leq 0$$



$x \in \emptyset$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in \langle -4, 1\rangle}}$

Př. Načrtněte graf funkce $f(x) = -x^2 + 3|x-4| - 8$

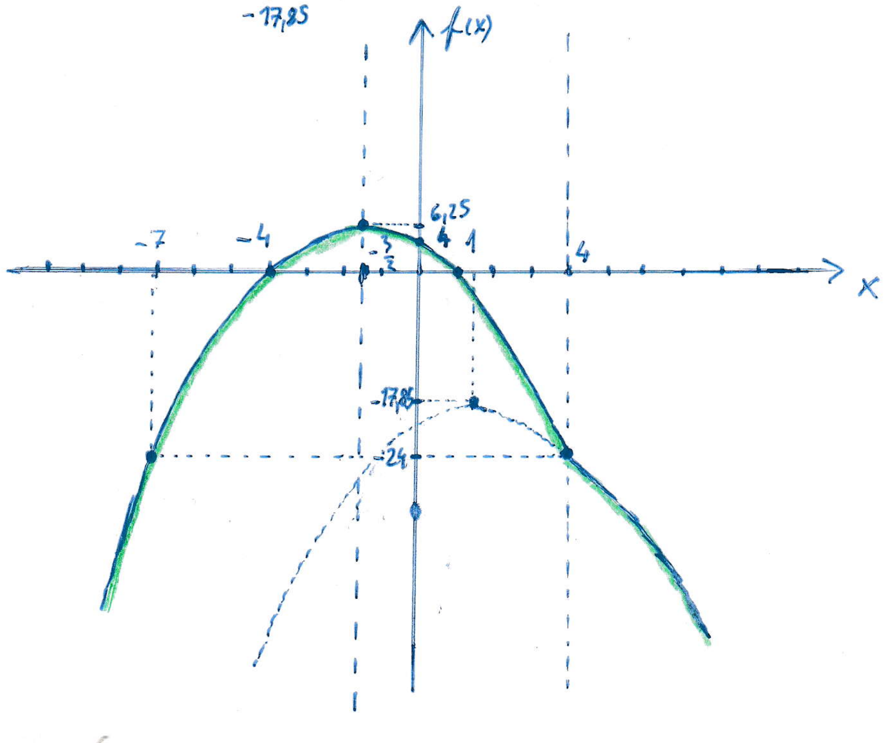
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3(x-4) - 8 = -x^2 - 3x + 4 = -(x+4)(x-1) & \text{pro } x \in (-\infty, 4\rangle \\ -x^2 + 3(x-4) - 8 = -x^2 + 3x - 20 = -\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \underbrace{\tfrac{9}{4} - 20}_{-17,85} & \text{pro } x \in (4, \infty) \end{cases}$$

$f(4) = -16 - 8 = -24$

$f(0) = -8$

$f\left(-\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{9}{4} + 3\tfrac{3}{2} + 4 =$

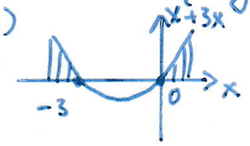
$= \dfrac{-9 + 18 + 16}{4} = \dfrac{25}{4} = 6,25$



Př. Nalezněte všechna řešení $(x \in \mathbb{R})$ rovnice $|x^2+3x|+x-5 = 0$

a) $x^2+3x \geq 0$ je splněno pro $x \in (-\infty,-3\rangle \cup \langle 0,\infty)$

$\underset{x\cdot(x+3)}{\shortparallel}$



$\Rightarrow$ Pro tato x je $|x^2+3x| = (x^2+3x)$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici:

$$x^2+3x+x-5=0$$
$$x^2+4x-5=0$$
$$(x+5)(x-1)=0 \Rightarrow x = \begin{cases} \underline{\underline{-5}} \in (-\infty,-3\rangle \cup \langle 0,\infty) \Rightarrow \text{je to řešení} \\ \underline{\underline{1}} \in (-\infty,-3\rangle \cup \langle 0,\infty) \Rightarrow \text{je to řešení} \end{cases}$$

b) $x^2+3x<0$ je splněno pro $x \in (-3,0)$ $\Rightarrow$ pro tato x řešíme:

$$-(x^2+3x)+x-5=0$$
$$-x^2-2x-5=0$$
$$-(x^2+2x+5)=0$$
$$-((x+1)^2+4)=0 \Rightarrow \text{v } \mathbb{R} \text{ nemá řešení}$$

$\Rightarrow$ <u>Zadaná rovnice je splněna jen pro $x=-5$ a $x=1$.</u>

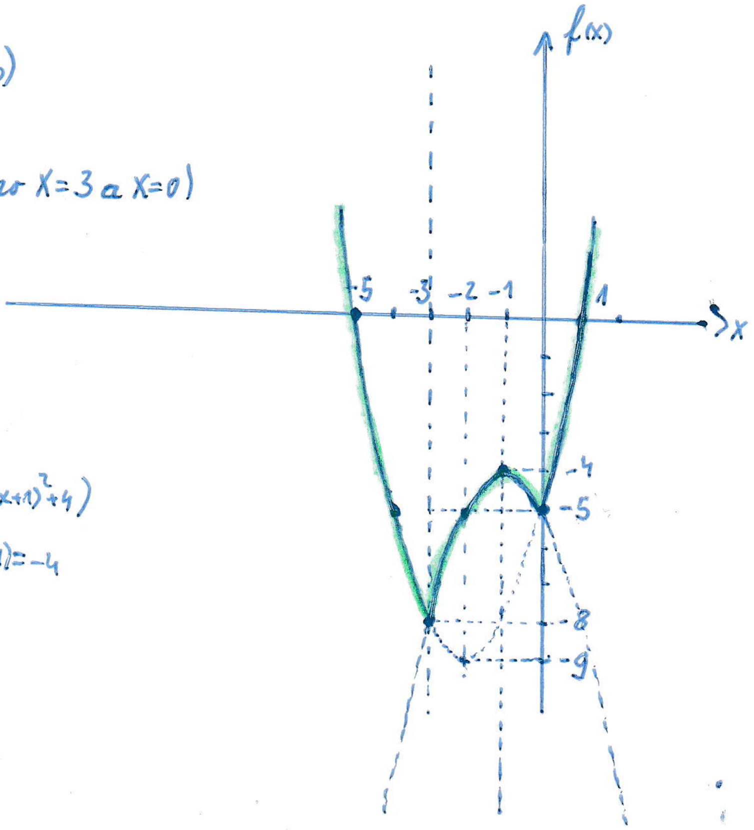
Př. Načrtněte graf funkce $f(x) = |x^2+3x|+x-5$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x-5=(x+5)(x-1) & \text{pro } x \in (-\infty,-3\rangle \cup \langle 0,\infty) \\ -((x+1)^2+4) & \text{pro } x \in (-3,0) \text{ (ale i pro } x=3 \text{ a } x=0) \end{cases}$$

$f(1)=0$
$f(-5)=0$
$f(0)=|0+0|+0-5=-5$

$f_1(x)=x^2+4x-5 \underset{(x+5)(x-1)}{\shortparallel}$ $\Rightarrow$ $f_1(-2)=4-8-5=-9$
$f_1(0)=-5$
$f_1(-3)=9-12-5=-8$
$f_1(-4)=-5$

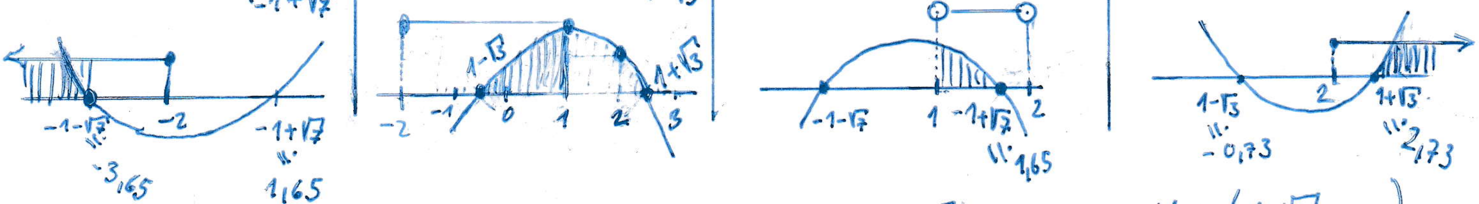
$f_2(x)=-((x+1)^2+4)$
$f_2(-1)=-4$



Př: Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x^2-4| - 2|x-1| \geq 0$.

$$|x^2-4| \begin{cases} (x^2-4) & \text{pro } x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty) \\ -(x^2-4) & \text{pro } x \in (-2,2) \end{cases} \qquad |x-1| \begin{cases} (x-1) & \text{pro } x \in (1,\infty) \\ -(x-1) & \text{pro } x \in (-\infty,1\rangle \end{cases}$$

$x \in (-\infty,-2\rangle$	$x \in (-2,1\rangle$	$x \in (1,2)$	$x \in \langle 2,\infty)$
$\lvert x^2-4\rvert = x^2-4$ $\lvert x-1\rvert = -(x-1)$	$\lvert x^2-4\rvert = -(x^2-4)$ $\lvert x-1\rvert = -(x-1)$	$\lvert x^2-4\rvert = -(x^2-4)$ $\lvert x-1\rvert = x-1$	$\lvert x^2-4\rvert = x^2-4$ $\lvert x-1\rvert = x-1$
$(x^2-4)+2(x-1) \geq 0$ $x^2+2x-6 \geq 0$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = -1-\sqrt{7};\ -1+\sqrt{7}$	$-(x^2-4)+2(x-1) \geq 0$ $-x^2+2x+2 \geq 0$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{-2} = 1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}$	$-(x^2-4)-2(x-1)$ $-x^2-2x+6 \geq 0$ $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{-2} = -1-\sqrt{7};\ -1+\sqrt{7}$	$(x^2-4)-2(x-1) \geq 0$ $x^2-2x-2 \geq 0$ $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}$



$x \in (-\infty,-1-\sqrt{7}\rangle$	$x \in \langle 1-\sqrt{3},1\rangle$	$x \in (1,-1+\sqrt{7}\rangle$	$x \in \langle 1+\sqrt{3},\infty)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty,-1-\sqrt{7}\rangle \cup \langle 1-\sqrt{3},-1+\sqrt{7}\rangle \cup \langle 1+\sqrt{3},\infty)}}$$

Př: Načrtněte graf funkce $f(x) = |x^2-4| - 2|x-1|$

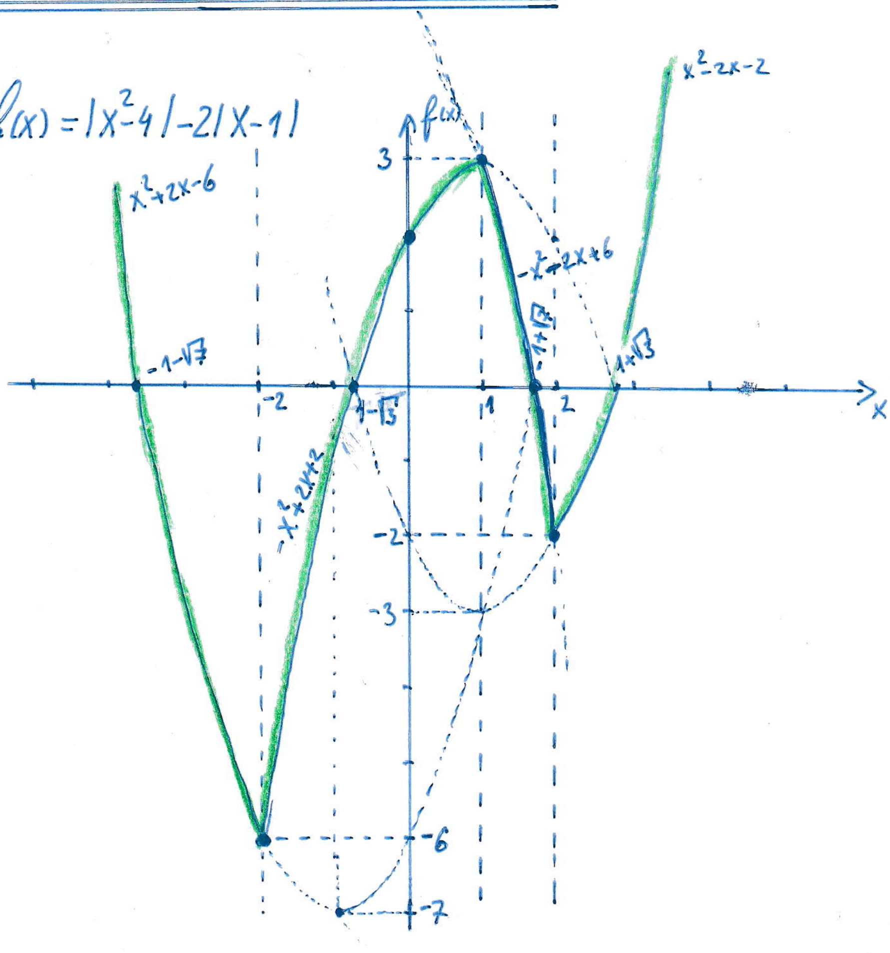
$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-6 & \text{pro } x \in (-\infty,-2\rangle \\ -x^2+2x+2 & \text{pro } x \in (-2,1\rangle \\ -x^2-2x+6 & \text{pro } x \in (1,2) \\ x^2-2x-2 & \text{pro } x \in \langle 2,\infty) \end{cases}$$

$f(-2) = -6$

$f(1) = 3$

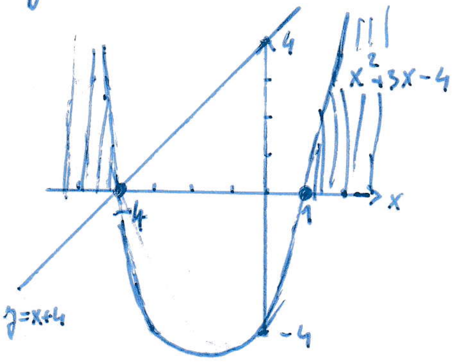
$f(2) = -2$

$f(0) = 2$



Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující: $|x^2+3x-4|-|x+4| \geq 0$.

$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1) \Rightarrow$

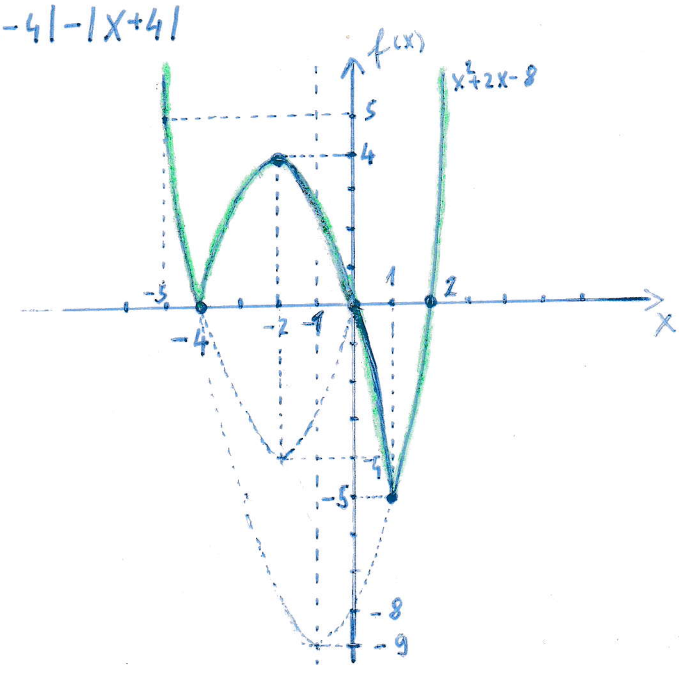


$x \in (-\infty, -4\rangle$	$x \in (-4, 1\rangle$	$x \in (1, \infty)$
$\|x^2+3x-4\| = x^2+3x-4$	$\|x^2+3x-4\| = -x^2-3x+4$	$\|x^2+3x-4\| = x^2+3x-4$
$\|x+4\| = -x-4$	$\|x+4\| = x+4$	$\|x+4\| = x+4$
$x^2+3x-4-(-x-4) \geq 0$	$-x^2-3x+4-(x+4) \geq 0$	$x^2+3x-4-(x+4) \geq 0$
$x^2+4x \geq 0$	$-x^2-4x \geq 0 \quad \| \cdot (-1)$	$x^2+2x-8 \geq 0$
$x(x+4) \geq 0$	$x^2+4x \leq 0$	$(x+4)(x-2) \geq 0$
	$x(x+4) \leq 0$	
$x \in [(-\infty,-4\rangle \cup \langle 0,\infty)] \cap (-\infty,-4\rangle$	$x \in \langle -4, 0\rangle \cap (-4, 1\rangle$	$x \in [(-\infty,-4\rangle \cup \langle 2,\infty)] \cap (1,\infty)$
$x \in (-\infty, -4\rangle$	$x \in \langle -4, 0\rangle$	$x \in \langle 2, \infty)$

$\Rightarrow$ Nerovnice je splněna pro $x \in \overbrace{(-\infty,-4\rangle \cup \langle -4,0\rangle}^{(-\infty,0\rangle} \cup \langle 2,\infty)$

Př. Načrtněte graf funkce $f(x) = |x^2+3x-4|-|x+4|$

$$f(x) = \begin{cases} x(x+4) & \text{pro } x \in (-\infty, -4\rangle \\ -x^2-4x = -x(x+4) & \text{pro } x \in (-4, 1\rangle \\ x^2+2x-8 = (x+4)(x-2) & \text{pro } x \in (1, \infty) \end{cases}$$



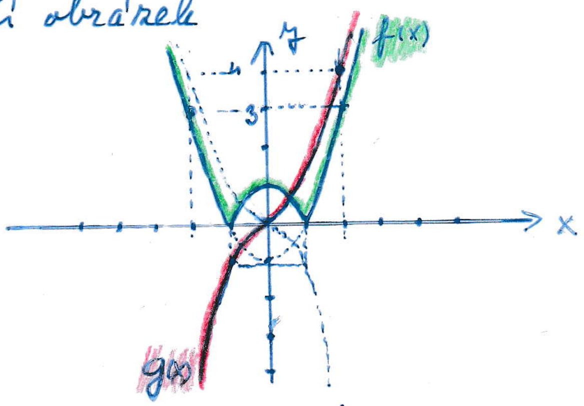
Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $|1+x| \cdot |1-x| = x \cdot |x|$

$1-x \geq 0 \iff 1 > x$

$x\in(-\infty,-1\rangle$	$x\in(-1,0\rangle$	$x\in(0,1\rangle$	$x\in(1,\infty)$
$\|1+x\| = -(1+x)$ $\|1-x\| = 1-x$ $\|x\| = -x$	$\|1+x\| = 1+x$ $\|1-x\| = 1-x$ $\|x\| = -x$	$\|1+x\| = 1+x$ $\|1-x\| = 1-x$ $\|x\| = x$	$\|1+x\| = 1+x$ $\|1-x\| = -(1-x)$ $\|x\| = x$
$-(1+x)(1-x) = -x^2$ $-(1-x^2) = -x^2$ $-1+x^2 = -x^2$ $1 = 2x^2$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq \pm 0{,}707$ $\notin (-\infty,-1\rangle$ $\emptyset$	$(1+x)(1-x) = -x^2$ $1-x^2 = -x^2$ $1 = 0$ $\emptyset$	$(1+x)(1-x) = x^2$ $1-x^2 = x^2$ $1 = 2x^2$ $x^2 = \frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin (0,1\rangle$ $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0,1\rangle$	$-(1+x)(1-x) = x^2$ $-(1-x^2) = x^2$ $-1+x^2 = x^2$ $-1 = 0$ $\emptyset$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

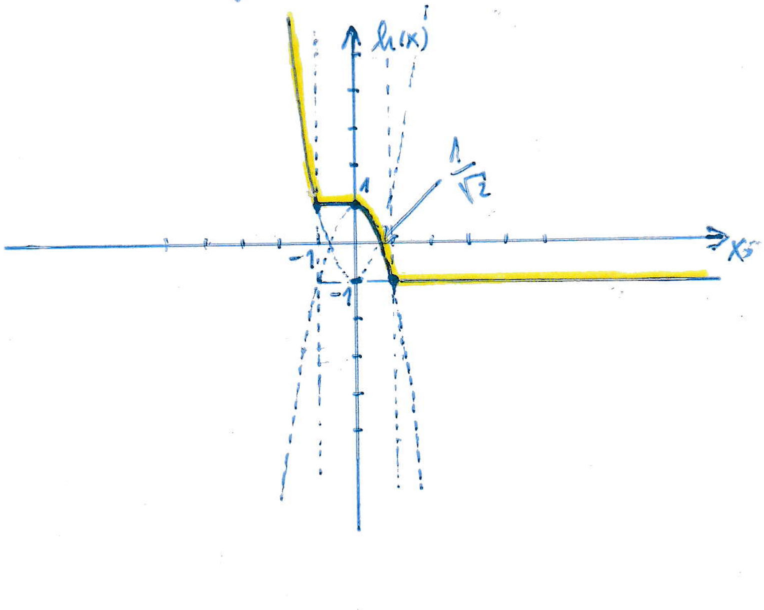
Př. Do jednoho obrázku namalujte grafy funkcí $f(x) = |1+x||1-x|$ a $g(x) = x \cdot |x|$ a $f(x) - g(x) = h(x)$ na další obrázek



$$f(x) = |1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle \\ -1+x^2 & \text{pro } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -1+2x^2 & \text{pro } x \in (-\infty,-1\rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (-1,0\rangle \\ 1-2x^2 & \text{pro } x \in (0,1\rangle \\ -1 & \text{pro } x \in (1,\infty) \end{cases}$$



Př: Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $\frac{|x^2 - x|}{|x-1|} = x$.

Řešíme pro $x \neq 1$.

$$\frac{|x^2 - x|}{|x-1|} = x$$

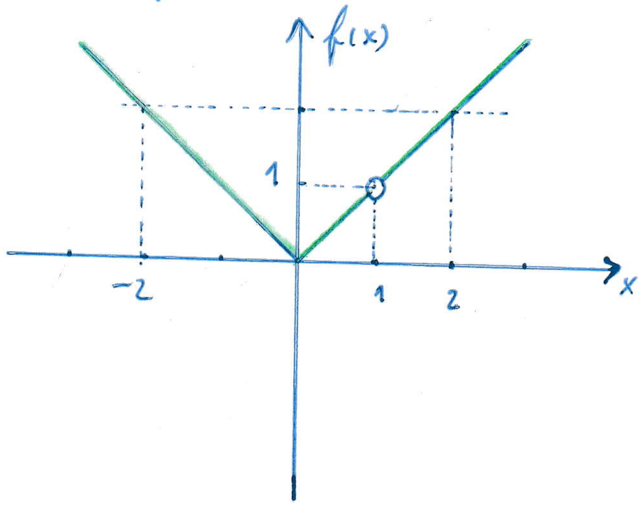
$$\frac{|x\cdot(x-1)|}{|x-1|} = x \quad / (\text{pro } x \neq 1)$$

$$|x| = x$$

$$\Rightarrow x \in \langle 0, \infty) - \{1\} = \underline{\underline{\langle 0, 1) \cup (1, \infty)}}$$

Př: Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{|x-1|}$

$f(x) = |x|$ pro $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $1 \notin D(f)$



5) $\left|\frac{x-5}{x+1}\right| \leq 4$

$x \neq -1$, n.b. $= \{5\}$

$(-\infty,-1)$ nebo $(-1,5\rangle$ nebo $\langle 5,+\infty)$

$\frac{x-5}{x+1} \leq 4$

! $x+1<0$

$x-5 \geq 4x+4$

$3x \leq -9$

$x \leq -3$

$(-\infty,-3\rangle$

$\frac{5-x}{x+1} \leq 4$

! $x+1>0$

$5-x \leq 4x+4$

$5x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{5}$

$\langle \frac{1}{5},5\rangle$

$\frac{x-5}{x+1} \leq 4$

analogicky jako 1. případ jen bez změny nerovn

$x \geq -3$

$\langle 5,+\infty)$

Řešením je $(-\infty,-3\rangle \cup \langle \frac{1}{5},+\infty)$.

6) $\frac{x-3}{x-1} \leq |x+1|$ (pracnější)

$x \neq 1$, n.b. $= \{-1\}$

$(-\infty,-1\rangle$ nebo $\langle -1,1)$ nebo $(1,+\infty)$

$\frac{x-3}{x-1} \leq -x-1$

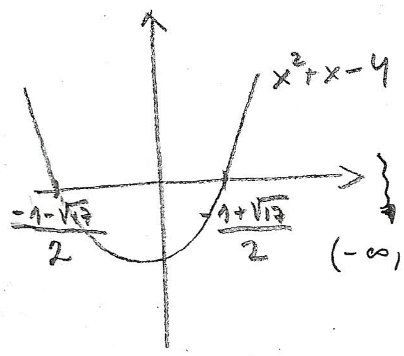
! $x-1<0$

$x-3 \geq -\underbrace{(x+1)(x-1)}_{x^2-1}$

$x^2+x-4 \geq 0$

$D = 1+16 = 17$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$



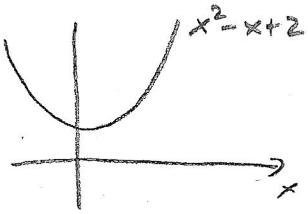
$(-\infty,\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\rangle$

$\frac{x-3}{x-1} \leq x+1$

$x-3 \geq x^2-1$

$x^2-x+2 \leq 0$

$D = 1-8 = -7 < 0$



$\emptyset$

$\frac{x-3}{x-1} \leq x+1$

$x-3 \leq x^2-1$

$x^2-x+2 \geq 0$

$(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ Řešením je

$(-\infty,\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\rangle \cup (1,+\infty)$.