Vektorový prostor

Def. (Reálný vektorový prostor): Vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel (nebo též reálným vektorovým prostorem) nazveme uspořádanou trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je množina, $+$ je zobrazení definované na $V \times V$, $\cdot$ je zobrazení definované na $\mathbb{R} \times V$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$:

1.) $\alpha . \bar{x} \in V$
2.) $\bar{x} + \bar{y} \in V$
3.) $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ (sčítání je asociativní)
4.) $\exists \bar{o} \in V\ \forall \bar{x} \in V : \bar{o} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{o} = \bar{x}$ (existence nulového vektoru $\bar{o}$)
5.) $\forall \bar{x} \in V\ \exists -\bar{x} \in V : \bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = \bar{o}$ (ke každému vekt. existuje v. opačný)
6.) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (sčítání je komutativní)

7.) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$
8.) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$
9.) $\alpha . (\beta . \bar{x}) = (\alpha . \beta) . \bar{x}$
10.) $1 . \bar{x} = \bar{x}$

Prvky množiny V nazýváme vektory vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$.

Poznámka: Formálně - podle definice - je vektorový prostor uspořádaná trojice $(V, +, \cdot)$ s vlastnostmi popsanými v definici. Intuitivně můžeme vektorový prostor chápat jako množinu, na níž jsme definovali sčítání (vektorů) a násobení (číslo krát vektor) a toto sčítání a násobení má „hezké" vlastnosti - tj. vlastn. 1.) - 10.).

Množinu na níž je definováno sčítání jejích prvků tak, že jsou splněny podmínky 2.) až 6.) nazýváme komutativní grupou. Tj. $(V, +)$ je komutativní grupa.

Vektorový prostor

Def. (Vektorový prostor): Vektorovým prostorem nad tělesem $(T, \oplus, \odot)$ nazveme uspořádanou trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je množina (její prvky nazýváme vektory), $+$ je zobrazení definované na $V \times V$, $\cdot$ je zobrazení definované na $T \times V$ a $\forall \alpha, \beta \in T$ a $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.) & \alpha \cdot \bar{x} \in V \\ 2.) & \bar{x} + \bar{y} \in V \end{array}\right\} \text{uzavřenost } + \text{ a } \cdot \text{ na } V$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3.) & (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) \\ 4.) & \exists \bar{o} \in V \ \forall \bar{x} \in V: \ \bar{o} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{o} = \bar{x} \\ 5.) & \forall \bar{x} \in V \ \exists -\bar{x} \in V: \ \bar{x} + (-\bar{x}) = -\bar{x} + \bar{x} = \bar{o} \\ 6.) & \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} \end{array}\right\} (V, +) \text{ je komutativní grupa}$$

$$\begin{array}{ll} 7.) & \alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y} \quad \} \text{ distributivní zákon} \\ 8.) & (\alpha \oplus \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x} \\ 9.) & (\alpha \odot \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x}) \\ 10.) & 1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \end{array}$$

, kde 1 je neutrálním prvkem vzhledem k operaci $\odot$

Poznámka:

- Požadavky 8.) – 10.) určují souvislost (vztah) operací na vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$ s operacemi na tělese $(T, \oplus, \odot)$.
- Pro jednoduchost zápisu se obvykle nerozlišuje značení operací na tělese od těch na vektorovém prostoru.

Např. místo $(2 \oplus 3) \cdot (1, 1, 8)$ píšeme $(2 + 3) \cdot (1, 1, 8)$ a místo $(3 \odot 5) \cdot (2, 4, 6)$ píšeme $(3 \cdot 5) \cdot (2, 4, 6)$

Příklad: Asi nejznámějším vektorovým prostorem $(V,+,\cdot)$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$ (pro jednoduchost nerozlišujeme značení operací $+$ a $\cdot$ na tělese a na vektorovém prostoru).

je případ, kde $V=\mathbb{R}^3$, $T=\mathbb{R}$ a:

operace na V operace na T

$$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,\,x_2+y_2,\,x_3+y_3)$$

$$\alpha\cdot(x_1,x_2,x_3)=(\alpha\cdot x_1,\,\alpha\cdot x_2,\,\alpha\cdot x_3)$$

násobení skalár x vektor operace na T

Co by se stalo, kdybychom místo $T=\mathbb{R}$ zvolili $T=\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ s obvyklým sčítáním a násobením také tvoří těleso)?

Taková struktura by nebyla vektorovým prostorem! Byla by porušena 1. podmínka z definice vektorového prostoru. Například:

$$\underset{T}{(1+i)}\cdot\underset{V=\mathbb{R}^3}{(2,0,3)}=\underset{\mathbb{C}^3}{(2+2i,\,0,\,3+3i)}\notin\mathbb{R}^3$$

Příklad: Uvažujme těleso $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \odot)$, kde $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ a operace + a · jsou dány tabulkami:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Dále nechť $V = \mathbb{Z}_3^3 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{Z}_3\}$ a definujme operaci $+: V \times V \to V$ předpisem:

$$(x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3) = (x_1 \oplus y_1,\ x_2 \oplus y_2,\ x_3 + y_3)$$

a zobrazení $\cdot : \mathbb{Z}_3 \times V \to V$ předpisem:

$$\underset{\in \mathbb{Z}_3}{\alpha} \cdot \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\in \mathbb{Z}_3^3} = (\alpha \odot x_1,\ \alpha \odot x_2,\ \alpha \odot x_3)$$

Ověřte, zda $(V,+,\cdot)$ je vektorovým prostorem nad tělesem $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \odot)$.

1.) $\forall (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{Z}_3^3 : (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (\underbrace{x_1 \oplus y_1}_{\in \mathbb{Z}_3},\ \underbrace{x_2 \oplus y_2}_{\in \mathbb{Z}_3},\ \underbrace{x_3 \oplus y_3}_{\in \mathbb{Z}_3}) \in \mathbb{Z}_3^3$

2.) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_3\ \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}_3^3 : \alpha \cdot (x_1,x_2,x_3) = (\underbrace{\alpha \odot x_1}_{\in \mathbb{Z}_3},\ \underbrace{\alpha \odot x_2}_{\in \mathbb{Z}_3},\ \underbrace{\alpha \odot x_3}_{\in \mathbb{Z}_3}) \in \mathbb{Z}_3$

3.) $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_3^3 : \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \ldots = (x_1 \oplus (y_1 \oplus z_1),\ x_2 \oplus (y_2 \oplus z_2),\ x_3 \oplus (y_3 \oplus z_3)) = ((x_1 \oplus y_1) \oplus z_1,\ \ldots) =$

$\oplus$ je operace na tělese $\Rightarrow$ je asociativní

$= ((x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3)) + (z_1,z_2,z_3) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$

4.) $\exists (0,0,0) \in \mathbb{Z}_3^3\ \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}_3^3 : (0,0,0) + (x_1,x_2,x_3) = (0 \oplus x_1,\ 0 \oplus x_2,\ 0 \oplus x_3) = (x_1,x_2,x_3)$

$(x_1,x_2,x_3) + (0,0,0) = \underbrace{(x_1 \oplus 0,\ x_2 \oplus 0,\ x_3 \oplus 0)}_{0 \text{ je neutrálním prvkem vzhledem k } \oplus} = (x_1,x_2,x_3)$

5.) $\forall (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{Z}_3^3 \ \exists -(x_1,x_2,x_3) = \underset{\swarrow \text{inverzní prvek k } x_1 \text{ vzhledem k } \oplus}{(-x_1,-x_2,-x_3)} \in \mathbb{Z}_3^3$:

$$(x_1,x_2,x_3)+(-x_1,-x_2,-x_3) = (x_1\oplus -x_1,\ x_2\oplus -x_2,\ x_3\oplus -x_3) = (0,0,0) = (-x_1,-x_2,-x_3)+(x_1,x_2,x_3)$$

6.) $\forall (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in \mathbb{Z}_3^3$:

protože $\oplus$ je komutativní

$$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (x_1\oplus y_1,\ x_2\oplus y_2,\ x_3\oplus y_3) = (y_1\oplus x_1,\ y_2\oplus x_2,\ y_3\oplus x_3) =$$
$$= (y_1,y_2,y_3)+(x_1,x_2,x_3)$$

7.) $\forall \alpha\in \mathbb{Z}_3 \ \forall \underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{\text{"}\bar{x}\text{"}},\underbrace{(y_1,y_2,y_3)}_{\text{"}\bar{y}\text{"}}\in \mathbb{Z}_3^3$:

$\oplus$ a $\odot$ jsou distributivní z leva

$$\alpha\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\cdot\big((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)\big) = \alpha\cdot\big((x_1\oplus y_1,\ x_2\oplus y_2,\ x_3\oplus y_3)\big) =$$
$$(\alpha\odot(x_1\oplus y_1),\ \alpha\odot(x_2\oplus y_2),\ \alpha\odot(x_3\oplus y_3)) = (\alpha\odot x_1\oplus \alpha\odot y_1,\ \alpha\odot x_2\oplus\alpha\odot y_2,\ \alpha\odot x_3\oplus\alpha\odot y_3)$$
$$= (\alpha\odot x_1,\ \alpha\odot x_2,\ \alpha\odot x_3) + (\alpha\odot y_1,\ \alpha\odot y_2,\ \alpha\odot y_3) = \alpha\cdot(x_1,x_2,x_3) + \alpha(y_1,y_2,y_3) =$$
$$= \alpha\cdot\bar{x}+\alpha\cdot\bar{y}$$

8.) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_3 \ \forall \bar{x} = (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{Z}_3^3$:

$\odot$ je asociativní

$$(\alpha\odot\beta)\cdot\bar{x} = (\alpha\odot\beta)\cdot(x_1,x_2,x_3) = ((\alpha\odot\beta)\odot x_1,\ (\alpha\odot\beta)\odot x_2,\ (\alpha\odot\beta)\odot x_3) =$$
$$= (\alpha\odot(\beta\odot x_1),\ \alpha\odot(\beta\odot x_2),\ \alpha\odot(\beta\odot x_3)) = \alpha\cdot(\beta\odot x_1,\ \beta\odot x_2,\ \beta\odot x_3) =$$
$$= \alpha\cdot(\beta\cdot\bar{x})$$

9.) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_3 \ \forall \bar{x} = (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{Z}_3^3$:

$\oplus$ a $\odot$ jsou distributivní z prava

$$(\alpha\oplus\beta)\cdot\bar{x} = (\alpha\oplus\beta)\cdot(x_1,x_2,x_3) = ((\alpha\oplus\beta)\odot x_1,\ (\alpha\oplus\beta)\odot x_2,\ (\alpha\oplus\beta)\odot x_3) =$$
$$= (\alpha\odot x_1\oplus\beta\odot x_1,\ \alpha\odot x_2\oplus\beta\odot x_2,\ \alpha\odot x_3\oplus\beta\odot x_3) =$$
$$= (\alpha\odot x_1,\ \alpha\odot x_2,\ \alpha\odot x_3) + (\beta\odot x_1,\ \beta\odot x_2,\ \beta\odot x_3) = \alpha\cdot\bar{x}+\beta.\bar{x}$$

10.) $\forall \bar{x} = (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{Z}_3^3$:

$$1\cdot\bar{x} = 1\cdot(x_1,x_2,x_3) = (1\odot x_1,\ 1\odot x_2,\ 1\odot x_3) = (x_1,x_2,x_3) = \bar{x}$$

1 je neutrální prvek vzhledem k $\odot$

<u>Příklad</u> : Nechť $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ a $\oplus$ a $\odot$ jsou obvyklé operace na $\mathbb{Z}_2$ (tj. sčítání a násobení modulo 2). Dále nechť $V = \mathbb{Z}_2^3$ a operace $+$ a $\cdot$ jsou na $\mathbb{Z}_2^3$ definovány předpisy:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, x_3 \oplus y_3)$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha \odot x_1, \alpha \odot x_2, \alpha \odot x_3)$$

Dokažte, že $(\mathbb{Z}_2^3, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$.

(Např. $(1,0,1) + (1,1,1) = (0,1,0)$ a $1 \cdot (1,1,0) = (1,1,0)$)

Důkaz:

1.) $\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Z}_2^3 : \quad \bar{x} + \bar{y} = (\underbrace{x_1 \oplus y_1}_{\in \mathbb{Z}_2}, \underbrace{x_2 \oplus y_2}_{\in \mathbb{Z}_2}, \underbrace{x_3 \oplus y_3}_{\in \mathbb{Z}_2}) \in \mathbb{Z}_2^3$

2.) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_2 \,\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_2^3 : \alpha \cdot \bar{x} = (\underbrace{\alpha \odot x_1}_{\in \mathbb{Z}_2}, \underbrace{\alpha \odot x_2}_{\in \mathbb{Z}_2}, \underbrace{\alpha \odot x_3}_{\in \mathbb{Z}_2}) \in \mathbb{Z}_2^3$

3.) $\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3), \bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{Z}_3^2$:

$$\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (x_1, x_2, x_3) + (y_1 \oplus z_1, y_2 \oplus z_2, y_3 + z_3) = (x_1 \oplus (y_1 \oplus z_1), x_2 \oplus (y_2 + z_2), x_3 \oplus (y_3 \oplus z_3))$$

$$= ((x_1 \oplus y_1) + z_1, (x_2 \oplus y_2) + z_2, (x_3 \oplus y_3) + z_3) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$$

protože operace $\oplus$ na tělese $\mathbb{Z}_2$ je asociativní

4.) $\exists (0,0,0) \in \mathbb{Z}_2^3 \;\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_2^3 : \; (0,0,0) + (x_1, x_2, x_3) = (0 \oplus x_1, 0 \oplus x_2, 0 \oplus x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

$$(x_1, x_2, x_3) + (0,0,0) = (x_1 \oplus 0, x_2 \oplus 0, x_3 \oplus 0) = (x_1, x_2, x_3)$$

5.) $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_2^3 : \; \bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, x_3 \oplus y_3) =$

$$= (y_1 \oplus x_1, y_2 \oplus x_2, y_3 \oplus x_3) = \bar{y} + \bar{x}$$

protože operace $\oplus$ je na tělese komutativní

6.) $\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_2^3 \;\exists -\bar{x} = (-x_1, -x_2, -x_3) : \; \bar{x} + (-\bar{x}) = (x_1 \oplus (-x_1), x_2 \oplus (-x_2), x_3 \oplus (-x_3)) =$

$$= (0,0,0) = -\bar{x} + \bar{x}$$

protože $+$ je komutativní (viz 5.)

$-x_i$ je inverzní prvek k x_i vzhledem k operaci $\oplus$

7.) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_2 \;\; \forall \bar{x}=(x_1,x_2,x_3), \bar{y}=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{Z}_2^3$:

$$\alpha\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\cdot(x_1\oplus y_1, x_2\oplus y_2, x_3+y_3) = (\alpha\odot(x_1\oplus y_1), \alpha\odot(x_2\oplus y_2), \alpha\odot(x_3+y_3)) =$$

$$= (\alpha\odot x_1 \oplus \alpha\odot y_1, \alpha\odot x_2 \oplus \alpha\odot y_2, \alpha\odot x_3\oplus\alpha\odot y_3) =$$

$$= (\alpha\odot x_1, \alpha\odot x_2, \alpha\odot x_3) + (\alpha\odot y_1, \alpha\odot y_2, \alpha\odot y_3) = \alpha\cdot\bar{x} + \alpha\cdot\bar{y}$$

8.) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_2 \;\; \forall \bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$: $(\alpha\odot\beta)\cdot\bar{x} = (\alpha\odot\beta)\cdot(x_1,x_2,x_3) =$

$$= ((\alpha\odot\beta)\odot x_1, (\alpha\odot\beta)\odot x_2, (\alpha\odot\beta)\odot x_3) =$$ ← operace „krát" je na tělese (což $\mathbb{Z}_2$ je), asociativní

$$= (\alpha\odot(\beta\odot x_1); \alpha\odot(\beta\odot x_2), \alpha\odot(\beta\odot x_3)) =$$

$$= \alpha\cdot(\beta\odot x_1, \beta\odot x_2, \beta\odot x_3) = \alpha\cdot(\beta\cdot\bar{x})$$

9.) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_2 \;\; \forall \bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$: $(\alpha\oplus\beta)\cdot\bar{x} = (\alpha\oplus\beta).(x_1,x_2,x_3) =$

$$= ((\alpha\oplus\beta)\odot x_1, (\alpha\oplus\beta)\odot x_2, (\alpha\oplus\beta)\odot x_3) =$$ ← operace „plus" je na tělese distributivní

$$= (\alpha\odot x_1\oplus\beta\odot x_1, \alpha\odot x_2\oplus\beta\odot x_2, \alpha\odot x_3\oplus\beta\odot x_3) =$$

$$= (\alpha\odot x_1, \alpha\odot x_2, \alpha\odot x_3) + (\beta\odot x_1, \beta\odot x_2, \beta\odot x_3) =$$

$$= \alpha\cdot\bar{x} + \beta\cdot\bar{x}$$

10.) $\forall \bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{Z}_2$:

$$1\cdot\bar{x} = 1\cdot(x_1,x_2,x_3) = (1\odot x_1, 1\odot x_2, 1\odot x_3) = (x_1,x_2,x_3) = \bar{x}$$

↑ neutrální prvek vzhledem k operaci $\odot$ na $\mathbb{Z}_2$

Poznámka: $(\mathbb{Z}_3^3, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \odot)$,

$(\mathbb{Z}_3^n, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \odot)$,

$(\mathbb{Z}_2^3, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$,

$(\mathbb{Z}_2^n, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$

$\vdots$

lze zobecnit (důkaz by se provedl zcela analogicky)

$(T^n, +, \cdot)$, kde

$$+ : \quad \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\in T^n} + \underbrace{(y_1, y_2, \dots, y_n)}_{\in T^n} = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots, x_n \oplus y_n)$$

$$\cdot : \quad \underbrace{\alpha}_{\in T} \cdot \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\in T^n} = (\alpha \odot x_1, \alpha \odot x_2, \dots, \alpha \odot x_n)$$

je vektorovým prostorem nad tělesem $(T, \oplus, \odot)$

= Aritmetický vektorový prostor T^n nad tělesem T.

Pro $n=1$ dostáváme zajímavé pozorování:

Těleso $(\overset{\text{„}T^1\text{"}}{T}, +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor samo nad sebou.

Příklad: $(\mathbb{C},+,\cdot)$, kde $+$ je obvyklá operace $+$ na $\mathbb{C}$, $\cdot$ je restrikce obvyklého násobení na $\mathbb{C}$ na množ. $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$, je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ (zde $\oplus$ a $\odot$ značí obvyklé operace na $\mathbb{R}$), kde $\dim\mathbb{C} = 2$.

Neboť $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ a $\forall \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\mathbb{C}$:

1.) $\alpha\cdot\bar{x} \in \mathbb{C}$

2.) $\bar{x}+\bar{y} \in \mathbb{C}$

3.) $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z}) = (\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}$

Neboť $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ a $\oplus$ a $\odot$ jsou restrikcemi zobrazení $+$ a $\cdot$ na množinu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(\mathbb{C},+,\underset{\text{nás. na } \mathbb{C}}{\cdot})$ je těleso a $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ jeho podtěleso.

4.) $\exists\, \bar{o} = 0+0i \in\mathbb{C}\ \forall \bar{x}\in\mathbb{C}:\ \bar{o}+\bar{x} = \bar{x}+\bar{o} = \bar{x}$

5.) $\forall\, \bar{x} = a+bi\in\mathbb{C}\ \exists -\bar{x} = -a+(-b)i\in\mathbb{C}:\ \bar{x}+(-\bar{x}) = (-\bar{x})+\bar{x} = \bar{o}$

6.) $\bar{x}+\bar{y} = \bar{y}+\bar{x}$

7.) $\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}}\cdot(\underbrace{\bar{x}}_{\in\mathbb{C}}+\underbrace{\bar{y}}_{\in\mathbb{C}}) = \alpha\cdot\bar{x}+\alpha\bar{y}$ (násobení na $\mathbb{C}$ je distributivní)

8.) $(\underbrace{\alpha\oplus\beta}_{\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}})\cdot\bar{x} = (\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}}+\beta)\cdot\underbrace{\bar{x}}_{\in\mathbb{C}} = (\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{C}}+\underbrace{\beta}_{\in\mathbb{C}})\cdot\underbrace{\bar{x}}_{\in\mathbb{C}} = \alpha\cdot\bar{x}+\beta\cdot\bar{x}$ ($\mathbb{C}$ je těleso $\Rightarrow$ distributivní z leva)

9.) $(\underbrace{\alpha\odot\beta}_{\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}})\cdot\bar{x} = (\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}}\cdot\beta)\cdot\underbrace{\bar{x}}_{\in\mathbb{C}} = (\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{C}}\cdot\underbrace{\beta}_{\in\mathbb{C}})\cdot\underbrace{\bar{x}}_{\in\mathbb{C}} = \alpha\cdot(\beta\cdot\bar{x})$ ($\mathbb{C}$ je těleso $\Rightarrow$ asociativita nás.)

10.) $\underbrace{1}_{\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}}\cdot\underbrace{\bar{x}}_{\in\mathbb{C}} = \bar{x}$ ($1 = 1+0i$ je neutrálním prvkem vzhledem k násobení na $\mathbb{C}$)

Báze na $\mathbb{C}$: $\{1, i\}$

I.) $\forall z\in\mathbb{C}\ \exists\, a,b\in\mathbb{R}:\ z = a\cdot 1+b\cdot i$

II.) $k_1 1+k_2 i = 0 \iff k_1 = k_2 = 0$

$\Rightarrow$ 1 a i jsou lin. nezávislé

(kdyby $k_2\neq 0 \Rightarrow i = -\frac{k_1}{k_2}\in\mathbb{R}$ spor!

kdyby $k_1\neq 0 \Rightarrow 1 = -\frac{k_2}{k_1}i \Rightarrow 1^2 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)^2\cdot(-1)$ <0 spor!)

Př. Uvažujme konečné těleso $(T,+,\cdot)$, kde $T=\{0,1,x,x+1\}$ a operace $+: T\times T\to T$ a $\cdot : T\times T\to T$ jsou dány tabulkami:

$+$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

sčítáme koeficienty modulo 2

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

násobíme modulo x^2+x+1, koef. $\in \mathbb{Z}_2$

$(K,\oplus,\odot)$, kde $K=\{0,1\}$, $\oplus: K\times K\to K$ je restrikce $+$ a $\odot: K\times K\to K$ je restrikce $\cdot$ je podtěleso tělesa $(T,+,\cdot)$.

Definujme zobrazení $\cdot' : K\times T\to T$ jako restrikci zobrazení $\cdot : T\times T\to T$.

Potom $(T,+,\cdot')$ je vektorovým prostorem nad tělesem $(K,\oplus,\cdot)$.

Neboť $\forall \alpha,\beta\in K\ \forall \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in T$:

1.) $\alpha\cdot'\bar{x} = \alpha\cdot\bar{x}\in T$ ($\cdot'$ je restrikcí $\cdot : T\times T\to T$)

2.) $\bar{x}+\bar{y}\in T$ ($+ : T\times T\to T$)

3.) $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = x+(\bar{y}+\bar{z})$ (+ je operace na tělese => asociativní)

4.) $\exists\ \bar{o}=0\in T\ \forall \bar{x}\in T: \bar{o}+\bar{x}+\bar{x}+\bar{o}=\bar{o}$

5.) $\forall \bar{x}\in T\ \exists -\bar{x}\in T: \bar{x}+(-\bar{x}) = (-\bar{x})+\bar{x}=\bar{o}$ $(-1=1,\ -x=x,\ -(1+x)=1+x,\ -0=0)$

6.) $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$

7.) $\alpha\cdot'(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot\bar{y} = \alpha\cdot'\bar{x}+\alpha\cdot'\bar{y}$ ($\cdot$ je operace na tělese => distr.) (zleva i zprava

8.) $(\alpha\oplus\beta)\cdot'\bar{x} = (\alpha+\beta)\cdot\bar{x} = \alpha\cdot\bar{x}+\beta\cdot\bar{x} = \alpha\cdot'\bar{x}+\beta\cdot'\bar{x}$

9.) $(\alpha\odot\beta)\cdot'\bar{x} = (\alpha\cdot\beta)\cdot\bar{x} = \alpha\cdot(\beta\cdot\bar{x}) = \alpha\cdot'(\beta\cdot'\bar{x})$ (=> $\cdot$ je i asociativní)

10.) $1\cdot'\bar{x} = 1\cdot\bar{x} = \bar{x}$ (1 je neutrálním prvkem na T vzhledem ke $\cdot$)

Poznámka: Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a $(K, \oplus, \odot)$ jeho podtěleso. Potom $(T, +, \cdot')$, kde $\cdot'$ je restrikce zobrazení $\cdot : T \times T \to T$ na množinu $K \times T$ (tj. $\cdot' : K \times T \to T$), je vektorovým prostorem nad tělesem $(K, \oplus, \odot)$.

Zjednodušeně řečeno, těleso tvoří vektorový prostor nad svým podtělesem.