

Afinní prostor

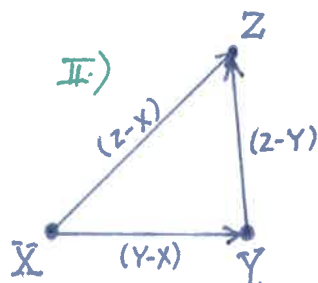
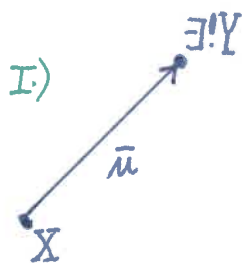
Def (Afinní prostor): Uspořádanou trojici $(B, V^m, -)$ nazveme n -dimenzionálním afinním prostorem nad tělesem $(T, \oplus, \odot)$ právě když:

- 1.) B je neprázdná množina
- 2.) $V^m = (V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $(T, \oplus, \odot)$, $\dim V = n$
- 3.) $- : B \times B \rightarrow V$ je zobrazení splňující:

$$\text{I.) } \forall X \in B \quad \forall \bar{u} \in V \quad \exists! Y \in B : Y - X = \bar{u}$$

$$\text{II.) } \forall X, Y, Z \in B : \underbrace{(Z - X)}_{\in V} = \underbrace{(Z - Y)}_{\in V} + \underbrace{(Y - X)}_{\in V}$$

↑
sčítání na V

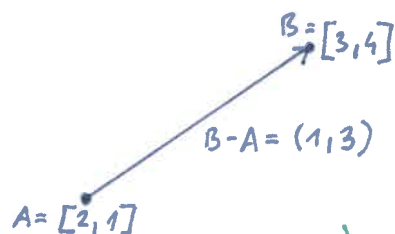


Pr. : $B = \mathbb{R}^2 = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}\}$; $V^2 = (V, +, \cdot)$, kde $V = \mathbb{R}^2 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$- : B \times B \rightarrow V$ je dáno předpisem :

$$[x_1, y_1] - [x_2, y_2] = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

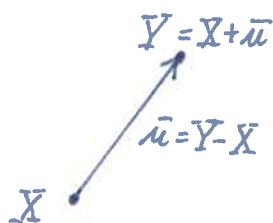
(abychom odlišili body od vektorů, dáваме je do hranatých závorek.)



$\Rightarrow (B, V^2, -)$ je afinní prostor dimenze 2.

Def (Sčítání bod+vektor): Necht' $(B, V, -)$ je n -dimenzionální afinní prostor nad tělesem $(T, \oplus, \odot)$. Definujeme relaci $\boxplus: B \times V \rightarrow B$

$$\forall X \in B \quad \forall \bar{u} \in V : \quad X \boxplus \bar{u} = Y \Leftrightarrow Y - X = \bar{u}$$



Věta: Vyšše definovaná relace $\boxplus: B \times V \rightarrow B$ je zobrazemí a plati:

- 1.) $\forall A \in B : \quad A \boxplus \bar{0} = A$, kde $\bar{0}$ je nulový vektor na V^n
- 2.) $\forall A \in B \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V : \quad A \boxplus (\bar{u} + \bar{v}) = (A \boxplus \bar{u}) \boxplus \bar{v}$
- 3.) $\forall A, B \in B \quad \exists! \bar{u} \in V : \quad A \boxplus \bar{u} = B$

Důkaz: $\boxplus$ je zobrazemí: Z definice afinního pr. plyne: $\forall X \in B \quad \forall \bar{u} \in V \quad \exists! Y \in B : Y - X = \bar{u} \Leftrightarrow X \boxplus \bar{u} = Y$

ad 1.) Z def. a. pr. plyne: $\forall A \in B \neq \emptyset$ ($\Rightarrow \exists$ nějaké A) : $\underbrace{(A-A)}_{\bar{u} \in V} = \underbrace{(A-A)}_{\bar{u} \in V} + \underbrace{(A-A)}_{\bar{u} \in V}$

$$\text{K } \bar{u} = A - A \in V \text{ jistě existuje vektor opačný } -\bar{u} \Rightarrow \begin{aligned} \bar{u} - \bar{u} &= (\bar{u} + \bar{u}) - \bar{u} \Rightarrow \\ \bar{0} &= \bar{u} + (\bar{u} - \bar{u}) \\ \bar{0} &= \bar{u} + \bar{0} \\ \bar{0} &= \bar{u} = A - A \Rightarrow \\ A &= A \boxplus \bar{0} \end{aligned}$$

ad 2.) Z def. a. pr. 3) I.) plyne, že $\exists B, C \in B : \bar{u} = B - A \wedge \bar{v} = C - B$

$$\Rightarrow (B = A \boxplus \bar{u} \wedge C = B \boxplus \bar{v}) \Rightarrow C = (A \boxplus \bar{u}) \boxplus \bar{v}$$

$$\bullet \quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u} = (C - B) + (B - A) \stackrel{3) II.}{=} (C - A) \Rightarrow C = A \boxplus (\bar{u} + \bar{v}) \quad \gg$$

ad 3.) $-: B \times B \rightarrow V$ je dle definice af. pr. zobrazemí $\Rightarrow \forall A, B \in B \quad \exists! \bar{u} \in V : B - A = \bar{u} \Rightarrow \forall A, B \in B \quad \exists! \bar{u} \in V : B = A \boxplus \bar{u}$.

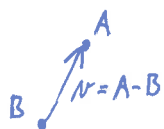
Pr. 11. Příkladem afinního prostoru $(\mathcal{B}, V^m, -)$ může být afinní prostor, kde

$$\mathcal{B} = \mathbb{Z}_3^3 = \{[x_1, x_2, x_3] \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_3\} \quad , \quad \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \dots \text{zbytkové třídy mod } 3$$

$$V^m = \mathbb{Z}_3^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_3\} \dots \text{vektorový prostor nad tělesem } \mathbb{Z}_3$$

$\therefore \mathbb{Z}_3^3 \times \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$ je $\forall A=[a_1, a_2, a_3], B=[b_1, b_2, b_3]$ dáno předpisem:

$$A - B = [a_1, a_2, a_3] - [b_1, b_2, b_3] = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$



Například: $[2, 1, 0] - [1, 2, 0] = (2-1, 1-2, 0-0) = (1, -1, 0) = (1, 2, 0)$

Nechť $(W, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, a $A \in \mathcal{B}$. Potom

$$\mathcal{B}' = \{A + w \mid w \in W\}$$

je podprostorem afinního prostoru $(\mathcal{B}, V^m, -)$. Jestliže $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m \in W$ je báze vekt. prostoru $W^m = (W, +, \cdot)$, potom:

$$\mathcal{B}' = \{A + k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2 + \dots + k_m \bar{e}_m \mid k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{T}\}$$

V případě, že $m=1$ je $(\mathcal{B}', W, -)$ přímkou afinního prostoru $(\mathcal{B}, V^m, -)$.
↑ restrikce - na $\mathcal{B}' \times \mathcal{B}'$

Pr. 12 Nalezněte všechny body přímky pro $(\mathbb{Z}_3^3, \mathbb{Z}_3^3, -)$ dané bodem $A=[1, 2, 0]$ a vektorem $\bar{e}_1 = (1, 1, 1)$ (tzn. $W = \langle (1, 1, 1) \rangle$).

$$\mathcal{B}' = \{A + k \cdot \bar{e}_1 \mid k \in \mathbb{Z}_3\}$$

$$\mu = (\mathcal{B}', \langle (1, 1, 1) \rangle, -)$$

$A = [1, 2, 0] = [1, 2, 0] + 0 \cdot (1, 1, 1) \in \mathcal{B}'$

$B = [1, 2, 0] + 1 \cdot (1, 1, 1) = [2, 0, 1] \in \mathcal{B}'$

$C = [1, 2, 0] + 2 \cdot (1, 1, 1) = [0, 1, 2]$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{B}' = \{[1, 2, 0], [2, 0, 1], [0, 1, 2]\}}}$$

Analytická geometrie v E_3

E ... euklidovský trojrozměrný prostor

$B = \{ [x_1, x_2, x_3] \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3$... množina bodů

$V = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3$... množina vektorů

Poznámka: abychom body odlišili od vektorů, používáme
u bodů hranaté závorky a u vektorů kulaté.

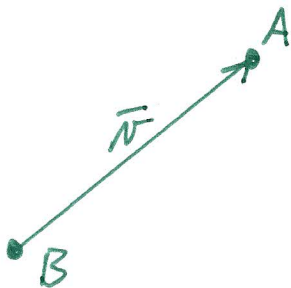
Na množině bodů zavedeme operaci $-: B \times B \rightarrow V$ předpisem

$$[a_1, a_2, a_3] - [b_1, b_2, b_3] = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

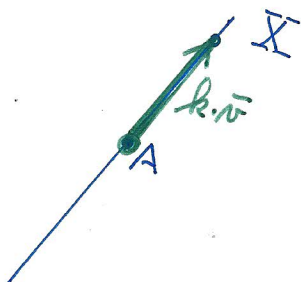
Pr.: Určete rozdíl bodů $A = [3, 1, 4]$ a $B = [2, -1, 1]$.

Výsledkem je vektor $A - B = [3, 1, 4] - [2, -1, 1] = \underline{\underline{(1, 2, 3)}}$.

Poznámka: Fakt, že $A - B = \vec{v}$ můžeme také formálně
napsat jako $A = B + \vec{v}$.



Vektorová rovnice přímky p : Je-li dána bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektorem $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak :



$$p: X = A + k \cdot \vec{v}$$

nebo rozepsáno pomocí souřadnic :

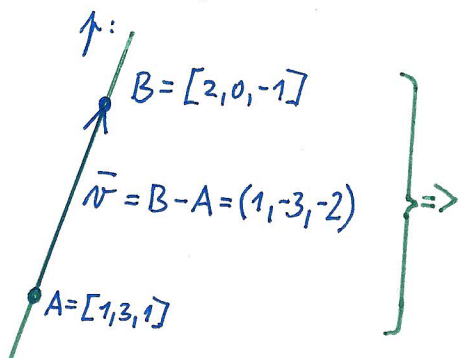
$$p: [x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + k(v_1, v_2, v_3)$$

Parametrické rovnice přímky p : Obdobně je rozepíšeme-li vektorovou rovnici pro jednotlivé souřadnice bodu X :

$$p: \begin{array}{l} x_1 = a_1 + k v_1 \\ x_2 = a_2 + k v_2 \\ x_3 = a_3 + k v_3 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} X & A & \vec{v} \end{array}$

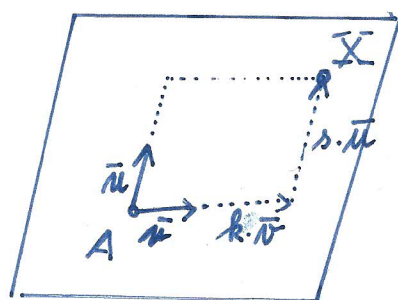
Př: Určete vektorovou rovnici a parametrické rovnice přímky, která je dána body $A = [1, 3, 1]$ a $B = [2, 0, -1]$.



$$\text{Vektorová rovnice: } p: \underline{\underline{X = [1, 3, 1] + k(1, -3, -2)}}$$

$$\text{Parametrické rovnice: } p: \begin{array}{l} x_1 = 1 + k \\ x_2 = 3 - 3k \\ x_3 = 1 - 2k \end{array}$$

Vektorová rovnice roviny ρ : Je-li dána bodem $A=[a_1, a_2, a_3]$ a dvěma vektory $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$:



$$\rho: X = A + s \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$$

neboli:

$$\rho: [x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + s(u_1, u_2, u_3) + k(v_1, v_2, v_3)$$

Pozor! Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nesmí být násobky jednoho druhého!

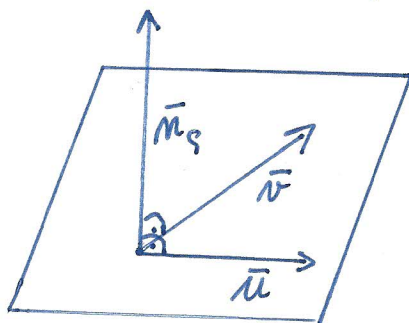
Parametrické rovnice roviny ρ : Rozepíšeme vektorovou rovnici po souřadnicích:

$$\rho: x_1 = a_1 + s u_1 + k v_1$$

$$x_2 = a_2 + s u_2 + k v_2$$

$$x_3 = a_3 + s u_3 + k v_3$$

Obecná rovnice roviny ρ : Obecná rovnice roviny ρ má tvar:



$$\rho: ax + by + cz + d = 0$$

nebo, považuje me-li značení souřadnic: $x_1=x, x_2=y, x_3=z$

$$\rho: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

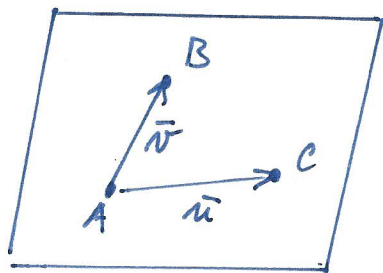
Obecnou rovnici můžeme získat z parametrických rovnic eliminací parametrů s a k , nebo s využitím faktu, že

$$(a, b, c) = \vec{n}_\rho = k \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$\vec{n}_\rho$... normálový vektor roviny ρ . Je kolmý na $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Př. 4. Rovina je dána body $A=[1,2,1]$; $B=[0,1,2]$; $C=[1,-1,3]$.

-4-



a) Určete vektorovou rovnici roviny ρ :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= C - A = [1, -1, 3] - [1, 2, 1] = [0, -3, 2] \\ \vec{v} &= B - A = [0, 1, 2] - [1, 2, 1] = [-1, -1, 1] \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\rho: \underline{\underline{X = [1, 2, 1] + s[0, -3, 2] + k[-1, -1, 1]}}$$

b) Určete parametrické rovnice roviny ρ :

$$\begin{aligned} \rho: \quad x_1 &= 1 - k \\ x_2 &= 2 - 3s - k \\ x_3 &= 1 + 2s + k \end{aligned}$$

c) Určete obecnou rovnici roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$

$\alpha)$ Eliminací parametrů:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - k \quad \Rightarrow k = 1 - x_1 \\ x_2 &= 2 - 3s - k \quad \leftarrow \text{dosadíme} \\ x_3 &= 1 + 2s + k \quad \leftarrow \end{aligned}$$

$$x_2 = 2 - 3s - 1 + x_1$$

$$x_3 = 1 + 2s + 1 - x_1$$

$$x_2 = 1 - 3s + x_1 \quad / \cdot 2$$

$$x_3 = 2 + 2s - x_1 \quad / \cdot 3$$

$$2x_2 = 2 - 6s + 2x_1$$

$$3x_3 = 6 + 6s - 3x_1$$

} rovnice sečteme

$$2x_2 + 3x_3 = 8 - x_1$$

$$\rho: \underline{\underline{x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8 = 0}}$$

$\beta)$ Pomocí normálového vektoru

$$\text{Zvolím } (a, b, c) = \vec{n}_\rho = \vec{u} \times \vec{v}.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = [0, -3, 2] \times [-1, -1, 1] =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 - (-2) & -(0 - (-2)) & 0 - (-1)(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= [-1, -2, -3] = (a, b, c) \Rightarrow$$

$$\rho: -x - 2y - 3z + d = 0$$

Využiji toho, že $A=[1,2,1] \in \rho$. Tj. dosadím

$$x=1, y=2, z=1:$$

$$-1 - 2(2) - 3 \cdot 1 + d = 0$$

$$-8 + d = 0 \Rightarrow d = 8 \Rightarrow$$

$$\rho: \underline{\underline{-x - 2y - 3z + 8 = 0}}$$

Poznámka: Všimněme si, že ρ může mít nekonečně mnoho různých obecních rovnic - stačí ji vynásobit nenulovým číslem...