

Analytická geometrie v E_3

E ... euklidovský trojrozměrný prostor

$B = \{ [x_1, x_2, x_3] \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3$... množina bodů

$V = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3$... množina vektorů

Poznámka: abychom body odlišili od vektorů, používáme
u bodů hranaté závorky a u vektorů kulaté.

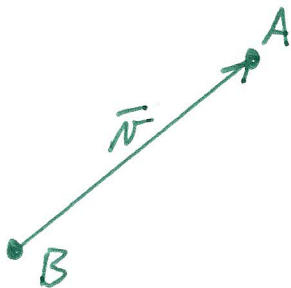
Na množině bodů zavedeme operaci $-: B \times B \rightarrow V$ předpisem

$$[a_1, a_2, a_3] - [b_1, b_2, b_3] = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

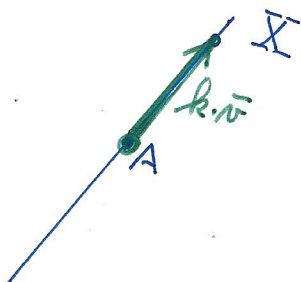
Pr.: Určete rozdíl bodů $A = [3, 1, 4]$ a $B = [2, -1, 1]$.

Výsledkem je vektor $A - B = [3, 1, 4] - [2, -1, 1] = \underline{\underline{(1, 2, 3)}}$.

Poznámka: Fakt, že $A - B = \vec{v}$ můžeme také formálně
napsat jako $A = B + \vec{v}$.



Vektorová rovnice přímky p : Je-li dána bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektorem $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak :



$$p: X = A + k \cdot \vec{v}$$

nebo rozepsáno pomocí souřadnic :

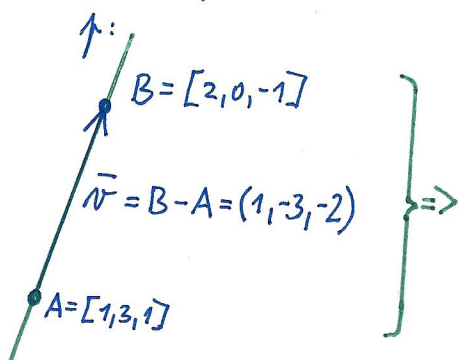
$$p: [x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + k(v_1, v_2, v_3)$$

Parametrické rovnice přímky p : Obdobně je rozepíšeme-li vektorovou rovnici pro jednotlivé souřadnice bodu X :

$$p: \begin{array}{l} x_1 = a_1 + k v_1 \\ x_2 = a_2 + k v_2 \\ x_3 = a_3 + k v_3 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} X & A & \vec{v} \end{array}$

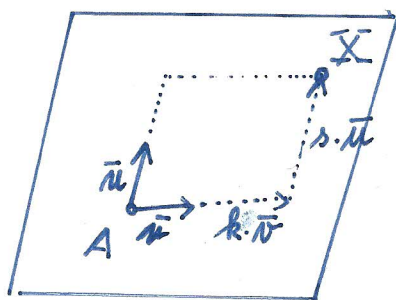
Pr: Určete vektorovou rovnici a parametrické rovnice přímky, která je dána body $A = [1, 3, 1]$ a $B = [2, 0, -1]$.



$$\text{Vektorová rovnice: } p: \underline{\underline{X = [1, 3, 1] + k(1, -3, -2)}}$$

$$\text{Parametrické rovnice: } p: \begin{array}{l} x_1 = 1 + k \\ x_2 = 3 - 3k \\ x_3 = 1 - 2k \end{array}$$

Vektorová rovnice roviny ρ : Je-li dána bodem $A=[a_1, a_2, a_3]$ a dvěma vektory $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$:



$$\rho: X = A + s \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$$

neboli:

$$\rho: [x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + s(u_1, u_2, u_3) + k(v_1, v_2, v_3)$$

Pozor! Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nesmí být násobky jedno druhého!

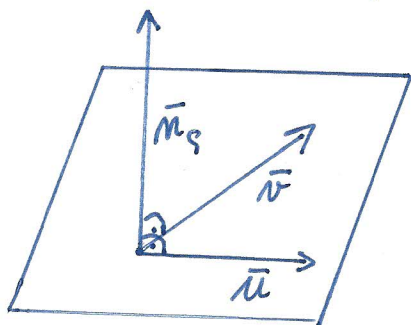
Parametrické rovnice roviny ρ : Rozepíšeme vektorovou rovnici po souřadnicích:

$$\rho: x_1 = a_1 + s u_1 + k v_1$$

$$x_2 = a_2 + s u_2 + k v_2$$

$$x_3 = a_3 + s u_3 + k v_3$$

Obecná rovnice roviny ρ : Obecná rovnice roviny ρ má tvar:



$$\rho: ax + by + cz + d = 0$$

nebo, považuje me-li značení souřadnic: $x_1=x, x_2=y, x_3=z$

$$\rho: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

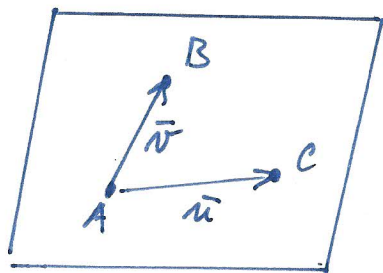
Obecnou rovnici můžeme získat z parametrických rovnic eliminací parametrů s a k , nebo s využitím faktu, že

$$(a, b, c) = \vec{n}_\rho = k \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$\vec{n}_\rho$... normálový vektor roviny ρ . Je kolmý na $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Př. 4. Rovina je dána body $A = [1, 2, 1]$; $B = [0, 1, 2]$; $C = [1, -1, 3]$.

-4-



a) Určete vektorovou rovnici roviny ρ :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= C - A = [1, -1, 3] - [1, 2, 1] = [0, -3, 2] \\ \vec{v} &= B - A = [0, 1, 2] - [1, 2, 1] = [-1, -1, 1] \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\rho: \underline{\underline{X = [1, 2, 1] + s[0, -3, 2] + k[-1, -1, 1]}}$$

b) Určete parametrické rovnice roviny ρ :

$$\begin{aligned} \rho: \quad X_1 &= 1 - k \\ X_2 &= 2 - 3s - k \\ X_3 &= 1 + 2s + k \end{aligned}$$

c) Určete obecnou rovnici roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$

α) Eliminací parametrů:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 - k \quad \Rightarrow k = 1 - X_1 \\ X_2 &= 2 - 3s - k \quad \leftarrow \text{dosadíme} \\ X_3 &= 1 + 2s + k \quad \leftarrow \end{aligned}$$

$$X_2 = 2 - 3s - 1 + X_1$$

$$X_3 = 1 + 2s + 1 - X_1$$

$$X_2 = 1 - 3s + X_1 \quad / \cdot 2$$

$$X_3 = 2 + 2s - X_1 \quad / \cdot 3$$

$$2X_2 = 2 - 6s + 2X_1$$

$$3X_3 = 6 + 6s - 3X_1$$

} rovnice sečteme

$$2X_2 + 3X_3 = 8 - X_1$$

$$\rho: \underline{\underline{X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 8 = 0}}$$

β) Pomocí normálového vektoru

$$\text{Zvolím } (a, b, c) = \vec{n}_\rho = \vec{u} \times \vec{v}.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = [0, -3, 2] \times [-1, -1, 1] =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 - (-2) & -(0 - (-2)) & 0 - (-1)(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= [-1, -2, -3] = (a, b, c) \Rightarrow$$

$$\rho: -x - 2y - 3z + d = 0$$

Využiji toho, že $A = [1, 2, 1] \in \rho$. Tj. dosadím

$$x=1, y=2, z=1:$$

$$-1 - 2(2) - 3 \cdot 1 + d = 0$$

$$-8 + d = 0 \Rightarrow d = 8 \Rightarrow$$

$$\rho: \underline{\underline{-x - 2y - 3z + 8 = 0}}$$

Poznámka: Všimněme si, že ρ může mít nekonečně mnoho různých obecných rovnic - stačí ji vynásobit nenulovým číslem...

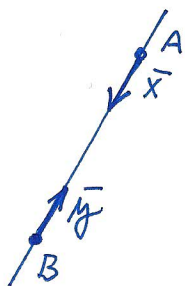
Vzájemná poloha dvou přímek v E_3

Uvažujme přímky $p: X = A + t\bar{x}$ a $q: X = B + s\bar{y}$.
Jejich vzájemná poloha v E_3 může být následující:

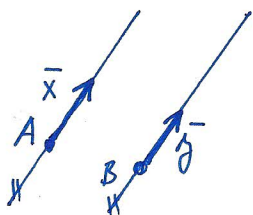
- 1.) p a q jsou incidentní (totožné) $\Leftrightarrow p \cap q = p = q$

platí:

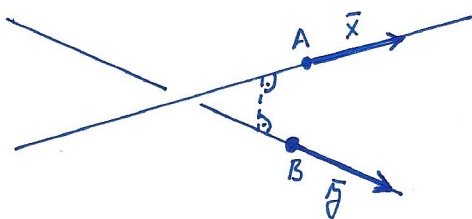
$$A - B = k_1 \bar{x} = k_2 \bar{y}$$



- 2.) p a q jsou rovnoběžné různé $\Leftrightarrow (p \cap q = \emptyset \wedge \bar{x} = k \bar{y})$

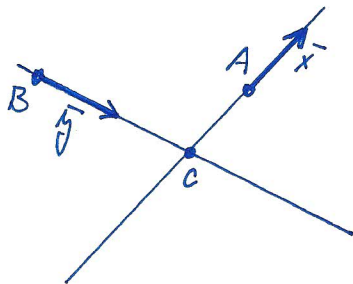


- 3.) p a q jsou mimoběžné $\Leftrightarrow (p \cap q = \emptyset \wedge \bar{x} \neq k \bar{y})$



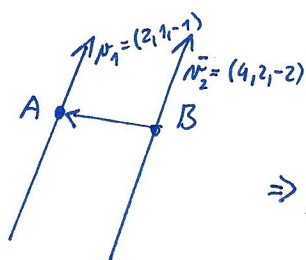
- 4.) p a q jsou různoběžné $\Leftrightarrow p \cap q = \{C\}$

bod C nazveme průsečíkem p a q .



Př.: Určete vzájemnou polohu přímek $p: X = \underbrace{[1, -1, 3]}_A + \lambda \underbrace{(2, 1, -1)}_{n_1}$
a $q: X = \underbrace{[1, 2, -1]}_B + s \underbrace{(4, 2, -2)}_{n_2}$

Řešení: Vektor $(4, 2, -2) = 2 \cdot (2, 1, -1)$. Přímky p a q jsou proto buď incidentní, nebo rovnoběžné/různé.
Určíme $A - B$:



$$A - B = [1, -1, 3] - [1, 2, -1] = (0, -3, 4) \neq k(2, 1, -1)$$

$\Rightarrow$ Přímky p a q jsou rovnoběžné/různé!

Př.: Určete vzájemnou polohu přímek $p: X = [1, 2, 1] + \lambda(3, 1, 4)$; $q: X = [-2, 1, -3] + s(3, 1, 2)$.

Řešení: Vektor $(3, 1, 4) \neq k \cdot (3, 1, 2)$. Proto jsou p a q buď různoběžné, nebo mimoběžné. Určíme $p \cap q$:

$$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 + 3\lambda \\ x_2 &= 2 + \lambda \\ x_3 &= 1 + 4\lambda \end{aligned}$$

$$q: \begin{aligned} x_1 &= -2 + 3s \\ x_2 &= 1 + s \\ x_3 &= -3 + 2s \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ hledáme s, λ tak, aby:

$$1 + 3\lambda = -2 + 3s$$

$$2 + \lambda = 1 + s$$

$$1 + 4\lambda = -3 + 2s$$

$$3\lambda - 3s = -3 \quad |:3$$

$$\lambda - s = -1$$

$$4\lambda - 2s = -4$$

$$\lambda - s = -1$$

$$\lambda - s = -1$$

$$4\lambda - 2s = -4$$

$\left. \begin{aligned} \lambda - s &= -1 \\ \lambda - s &= -1 \end{aligned} \right\} \text{stejná rovnice!}$

$$\lambda - s = -1$$

$$4\lambda - 2s = -4 \quad | \text{přičteme } (-4) \text{ násobek 1. rovnice}$$

$$0\lambda + 2s = 0 \Rightarrow s = 0 \leftarrow \text{dosadíme do rovnice } q$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow G = [-2, 1, -3]$ je průsečík p a q

$\Rightarrow$ Přímky p a q jsou různoběžné!

Pr: Určete vzájemnou polohu přímek $p: X = [1, 2, 1] + \lambda(1, 1, -1)$
a $q: X = [1, 3, 0] + s(1, 1, 1)$

Řešení: $(1, 1, -1) \neq k(1, 1, 1) \Rightarrow p$ a q jsou buď různoběžné,
nebo mimoběžné.

Určíme $p \cap q$: Hledáme $X = [x_1, x_2, x_3]$ patřící p i q

$$\begin{array}{ll} p: & \begin{array}{l} x_1 = 1 + \lambda \\ x_2 = 2 + \lambda \\ x_3 = 1 - \lambda \end{array} & q: & \begin{array}{l} x_1 = 1 + s \\ x_2 = 3 + s \\ x_3 = s \end{array} \end{array}$$

$$1 + \lambda = 1 + s$$

$$2 + \lambda = 3 + s$$

$$1 - \lambda = s$$

$$1 - s = 0$$

$$1 - s = -1$$

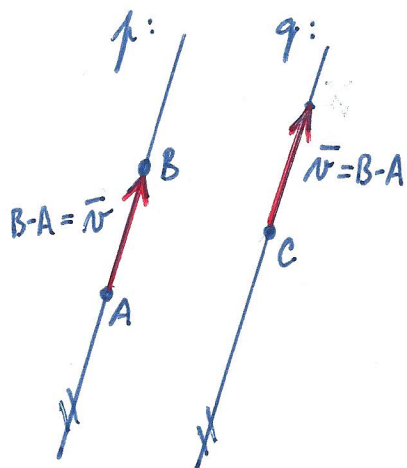
$$-1 - s = -1$$

$\} \Rightarrow 0 = -1$ Spor! S předpokladem, že
nějaké $X \in p \cap q \Rightarrow$

$p \cap q = \emptyset \Rightarrow p$ a q jsou mimoběžné!

Pr: Přímka p je dána dvěma body $A = [1, 3, 1]$ a $B = [-1, 2, 1]$.
Určete parametrické rovnice přímky q , která je s p
rovnoběžná a prochází bodem $C = [2, 1, -1]$.

Řešení:



$$B - A = \vec{n} = [-1, 2, 1] - [1, 3, 1] = (-2, -1, 0) \Rightarrow$$

$$q: X = C + k \vec{n}$$

$$q: x_1 = 2 - 2k$$

$$x_2 = 1 - k$$

$$x_3 = -1$$

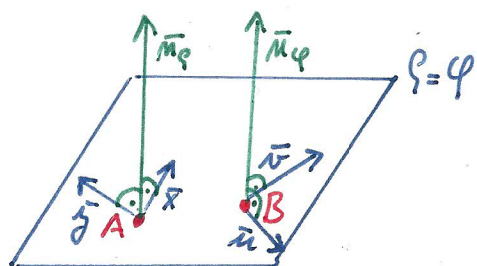
Vzájemná poloha dvou rovin v E_3 .

-8-

Uvažujme roviny $\rho: \bar{X} = A + k_1 \bar{x} + k_2 \bar{y}$ a
 $\varphi: \bar{X} = B + s_1 \bar{u} + s_2 \bar{v}$

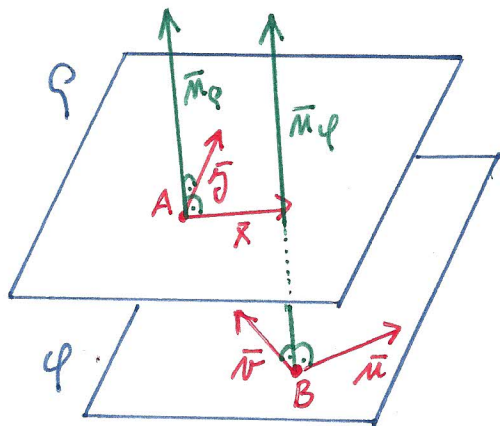
V E_3 mohou zaujmout následující vzájemné polohy:

1.) Incidentní (totožné): $\rho \cap \varphi = \rho = \varphi$



$$\rho = \varphi \Leftrightarrow (\bar{m}_\rho = k \bar{m}_\varphi \wedge A \in \varphi)$$

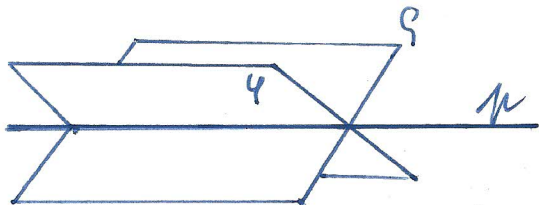
2.) Rovnoběžné různé: $\rho \cap \varphi = \emptyset \wedge \bar{m}_\rho = k \bar{m}_\varphi$



$$\rho \parallel \varphi \Leftrightarrow (\bar{m}_\rho = k \bar{m}_\varphi \wedge A \notin \varphi)$$

3.) Různoběžné:

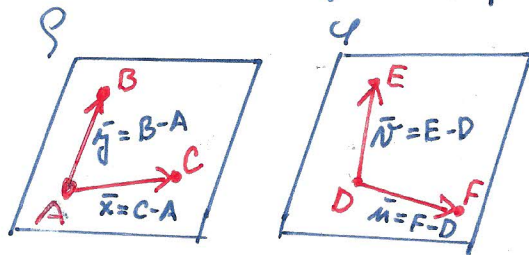
$\rho \cap \varphi = \mu \dots$ průsečnice



$$\bar{m}_\rho \neq k \bar{m}_\varphi$$

$P_{\text{ř}}^{\text{ř}}: \text{Rovina } \rho \text{ je dána body } A=[1,-1,3], B=[2,1,1] \text{ a } C=[0,1,1]. \text{ Rovina } \varphi \text{ je dána body } D=[0,1,3], E=[2,1,-1], F=[3,1,4].$

a) Určete vzájemnou polohu rovin ρ a φ .



Určíme $\bar{n}_\rho$ a $\bar{n}_\varphi$:

$$\bar{n}_\rho = (B-A) \times (C-A) = (1, 2, -2) \times (-1, 2, -2) = (|2-2|, -|1-2|, |1-2|) = (0, 4, 4)$$

$$\bar{n}_\varphi = (E-D) \times (F-D) = (2, 0, -4) \times (3, 0, 1) = (|0-4|, -|2-4|, |2-0|) = (0, -14, 0)$$

$$\Rightarrow \bar{n}_\rho \neq k \bar{n}_\varphi \Rightarrow \rho \text{ a } \varphi \text{ jsou různoběžné.}$$

b) Určete obecné rovnice rovin ρ a φ .

$$\bar{n}_\rho = (0, 4, 4) \Rightarrow \rho: 0x + 4y + 4z + d = 0 \quad / A=[1,-1,3] \in \rho \Rightarrow$$

$$0 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + d = 0$$

$$8 + d = 0$$

$$d = -8$$

$$\underline{\underline{\rho: 4y + 4z - 8 = 0}}$$

$$\bar{n}_\varphi = (0, -14, 0) \Rightarrow \varphi: 0x - 14y + 0z + d = 0 \quad / D=[0,1,3] \in \varphi \Rightarrow$$

$$0 \cdot 0 - 14 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + d = 0$$

$$d = 14$$

$$\varphi: -14y + 14 = 0 \quad / : (-14)$$

$$\underline{\underline{\varphi: y - 1 = 0}}$$

Tj. $y = 1$. V rovině φ leží všechny body z E_3 , jejichž y -ová souřadnice je rovna 1 (srovnaj se radámím).

Př.: Roviny ρ a φ jsou dány obecnými rovnicemi.
Nalezněte (existuje-li) jejich průsečnici p .

1) $\rho: 4y + 4z - 8 = 0$ $\varphi: y - 1 = 0$

Řešíme soustavu dvou rovnic o třech neznámých (x, y, z) :

$$\begin{array}{rcl} 4y + 4z - 8 = 0 & :4 & \Rightarrow y + z = 2 \\ y - 1 = 0 & & \Rightarrow y = 1 \end{array} \Rightarrow 1 + z = 2 \Rightarrow \underline{z = 1}$$

Zjistili jsme, že $z = 1$, $y = 1$ a x může být libovolné $\Rightarrow$

$$p: \begin{array}{l} x = \lambda \in \mathbb{R} \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 + 1\lambda \\ y = 1 + 0\lambda \\ z = 1 + 0\lambda \end{array}$$

$\Rightarrow$ Přímka p je dána bodem $[0, 1, 1]$ a vektorem $(1, 0, 0)$.

2.) $\rho: x + 2y + 3z + 1 = 0$ $\varphi: x - y + z + 2 = 0$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{array} \xrightarrow{-r_1} \begin{array}{l} -3y - 2z + 1 = 0 \end{array} \xRightarrow{\text{volím parametr } y = \lambda \in \mathbb{R}} \begin{array}{l} -3\lambda - 2z + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \underline{z = \frac{1 - 3\lambda}{2}}$$

$y = \lambda$ a $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda$ dosadíme do 1. rovnice $\Rightarrow$

$$x + 2\lambda + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda\right) + 1 = 0$$

$$x + 2\lambda - \frac{9}{2}\lambda + \frac{3}{2} + 1 = 0$$

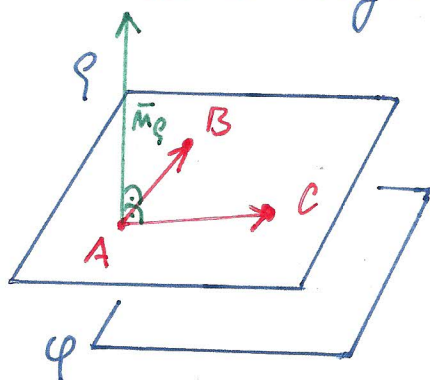
$$x - \frac{5}{2}\lambda + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \underline{x = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\lambda} \Rightarrow$$

$$p: \begin{array}{l} x = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \end{array}$$

Pr. 1: Rovina φ je dána body $A=[1,3,-1]$, $B=[2,1,4]$, $C=[1,1,3]$.

Rovina ψ je dána obecnou rovnicí $x-2y-z=3$.

Určete vzájemnou polohu φ a ψ .



Nejprve určíme $\bar{n}_\varphi$:

$$\begin{aligned}\bar{n}_\varphi &= (C-A) \times (B-A) = (0, -2, 4) \times (1, -2, 5) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-2, 4, 2) \\ &\quad \quad \quad \begin{matrix} -10+8 & -(0-4) & 0-(-2) \end{matrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_\varphi = (-2, 4, 2) = -2(1, -2, -1) = -2 \cdot \bar{n}_\psi$$

$\Rightarrow$ Roviny φ a ψ jsou buď totožné, nebo rovnoběžné různé.

Stačí ověřit, zda $A=[1,3,-1] \in \varphi$ (pokud by byla totožné). Dosadíme souřadnice A do rovnice roviny ψ : $x-2y-z=3$

$$1-2 \cdot 3 - (-1) = 3$$

$$1-6+1 = 3$$

$$-4 = 3 \text{ spor!} \Rightarrow A \notin \psi$$

$\Rightarrow$ φ a ψ jsou rovnoběžné různé.

Pozn.: Euklidovskou vzdáleností bodů $A=[a_1, a_2, a_3]$ a $B=[b_1, b_2, b_3]$ nazveme číslo

$$|AB| = \sqrt{(A-B) \cdot (A-B)} = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}$$

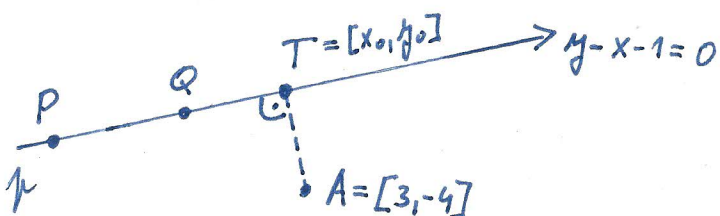
↑
skalární součin.

Př.: Najděte euklidovskou vzdálenost bodů $A=[1, 2, -1]$ a $B=[3, 1, 4]$

$$A-B = [1, 2, -1] - [3, 1, 4] = (-2, 1, -5) \Rightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{(-2, 1, -5) \cdot (-2, 1, -5)} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \underline{\underline{\sqrt{30}}}$$

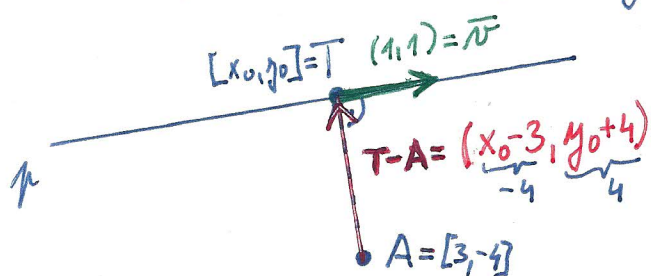
Př.: Určete vzdálenost bodu $A=[3, -4]$ od přímky $p: y-x-1=0$



$$|A_p| = |AT| = |T-A|$$

Najdeme dva body ležící na p ! Tak aby vyhovovaly jejich souřadnice rovnici $y-x-1=0$. Například $P=[1, 2]$ a $Q=[0, 1]$.

Směrovým vektorem přímky p je potom $P-Q=(1, 1)=\vec{n}$



Vektor $T-A=(x_0-3, y_0+4)$ a $\vec{n}=(1, 1)$ na sebe musí být kolmé $\Leftrightarrow$ jejich skalární součin je roven 0.

$$\Rightarrow (1, 1) \cdot (x_0-3, y_0+4) = 0$$

$$1 \cdot (x_0-3) + 1 \cdot (y_0+4) = 0$$

$$x_0-3+y_0+4=0$$

$$x_0 + y_0 + 1 = 0 \quad | T=[x_0, y_0] \in p \Rightarrow y_0-x_0-1=0 \Rightarrow y_0=x_0+1$$

$$x_0 + x_0 + 1 + 1 = 0$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1+1 = 0 \Rightarrow T = [-1, 0] \Rightarrow T-A = (-4, 4)$$

$$\Rightarrow |A_p| = |AT| = |T-A| = |(-4, 4)| = \sqrt{(-4, 4) \cdot (-4, 4)} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \underline{\underline{\sqrt{32}}}$$