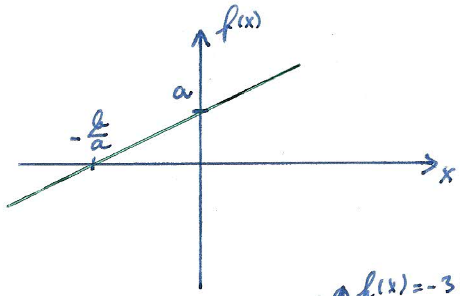
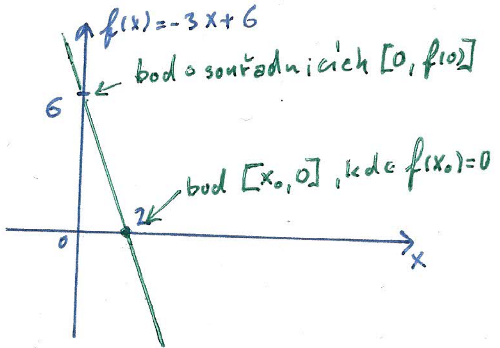
Lineární funkce

$f(x) = ax + b \quad ; \; a, b \in \mathbb{R}, \; a \neq 0$



Př. Načrtněte graf funkce $f(x) = -3x + 6$.

Grafem lineární funkce je přímka - stačí najít dva body, jimiž prochází. Například průsečíky s osami.



I.) $f(0) = -3 \cdot 0 + 6 = 6$

II.) $f(x_0) = 0$

$-3x_0 + 6 = 0$

$x_0 = 2$

Lineární rovnice: Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující: $3(x+1) = 4(x-1) + x$

Řešení:

$$3(x+1) = 4(x-1) + x$$
$$3x + 3 = 4x - 4 + x$$
$$7 = 2x$$
$$x = \frac{7}{2}$$

Lineární nerovnice: Př. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující: $4(2x-1) > 12(x+6) - x$

Řešení:

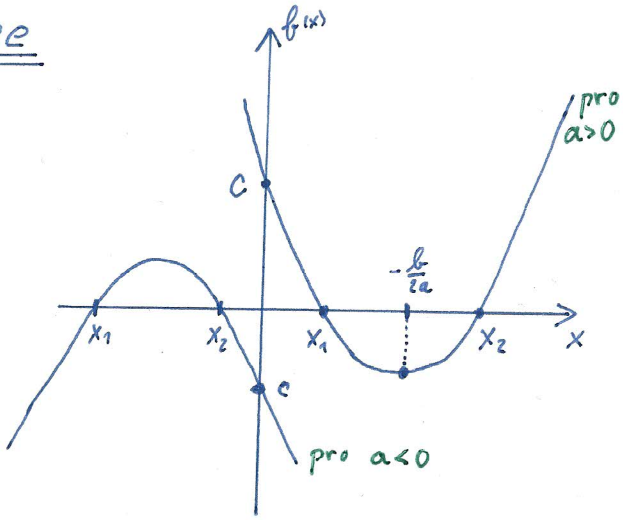
$$4(2x-1) > 12(x+6) - x$$
$$8x - 4 > 12x + 72 - x$$
$$-3x > 76 \quad /:(-3)$$

Pozor! Při dělení záporným číslem musíme otočit znaménko!

$$x < \frac{76}{-3}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{76}{3}\right)$$

Kvadratická funkce



$f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

grafem je parabola

Kvadratická rovnice: $\quad ax^2 + bx + c = 0$

tuto rovnici splňují: $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad$ pokud $b^2 - 4ac$ = Diskriminant $= D > 0$

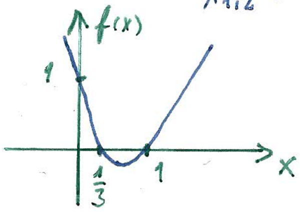
Najdeme tak čísla x_1, x_2, kde $f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ a $f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c = 0$

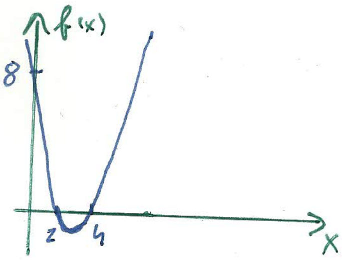
$\Rightarrow$ V bodech x_1, x_2 (pokud existují) protíná graf funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ osu X.

Př: Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující:

1.) $\underbrace{3x^2 - 4x + 1}_{f(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = \underline{\underline{1}} \\ \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \end{cases}$

$\Rightarrow$

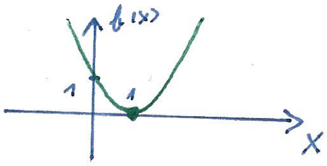




2.) $x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{4}} \\ \underline{\underline{2}} \end{cases}$

jinak: $x^2 - 6x + 8 = (x-4) \cdot (x-2) \nearrow$

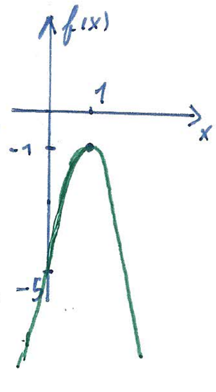
3.) $x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2} = \underline{\underline{1}}$



4.) $-x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{-2} \Rightarrow x_{1,2}$ neexistuje řešení

$\parallel$

$-(x^2 - 4x + 5) = -\left((x-2)^2 + 1 \right) = -(x-2)^2 - 1$



Př. Načrtněte graf funkce

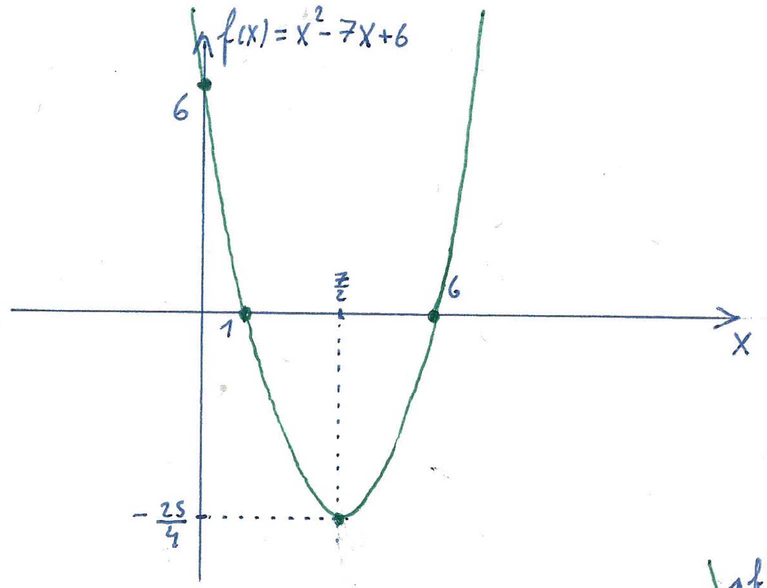
1.) $f(x) = x^2 - 7x + 6$

průsečík s osou y: $f(0) = 0^2 - 7 \cdot 0 + 6 = 6$

průsečíky s osou x: $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

souřadnice vrcholu paraboly: $x^2 - 7x + 6 = \underbrace{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2}_{x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6 =$

$= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{-49+24}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$



2.) $f(x) = x^2 - 8x + 17$

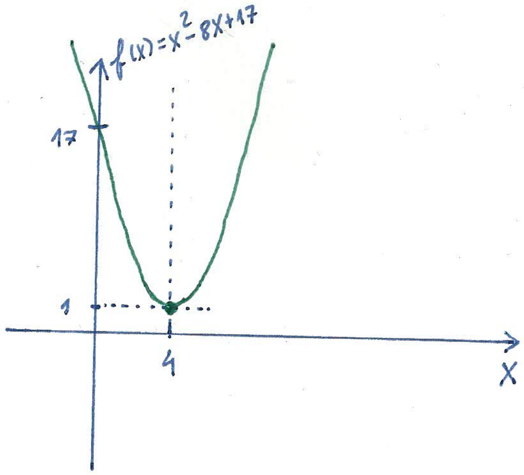
průs. s osou y: $f(0) = 17$

průs. s osou x: $D = 64 - 4 \cdot 17 = -4 \Rightarrow$ neexistují

souřadnice vrcholu: $x^2 - 8x + 17 =$

$= (x-4)^2 - 16 + 17 =$

$= (x-4)^2 + 1$

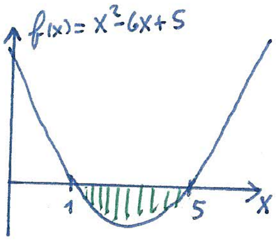


Kvadratické nerovnice: $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$

Pří mi Vyřešte kvadratickou nerovnici

1.) $x^2 - 6x + 5 < 0$

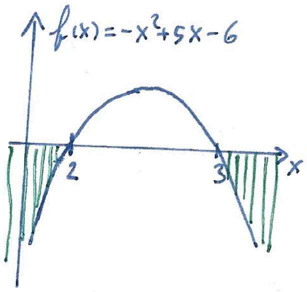
$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in (1, 5)}}$

2.) $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} = \dfrac{-5 \pm 1}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$

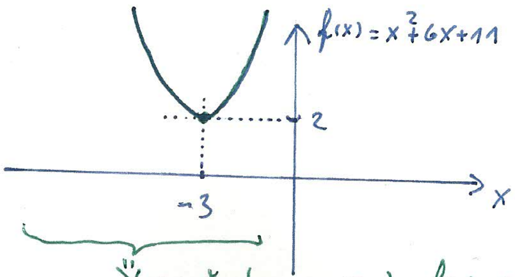


$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 3, \infty)}}$

3.) $x^2 + 6x + 11 < 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-4 \cdot 11}}{2}$ $\Rightarrow$ průs. neexistuje

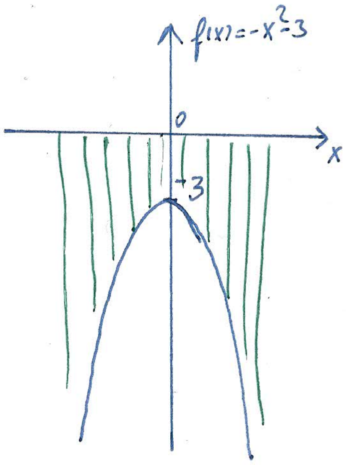
$x^2 + 6x + 11 = (x+3)^2 - 9 + 11 = (x+3)^2 + 2$



$\Downarrow$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) = x^2 + 6x + 11 > 0$

$\Rightarrow$ řešení neexistuje $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in \emptyset}}$

4.) $-x^2 - 3 \leq 0$



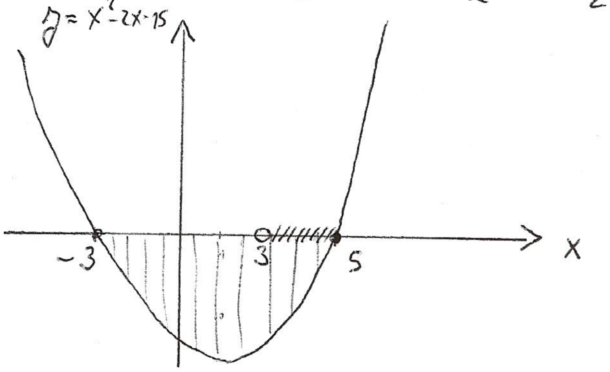
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$

Př: Vyřešte soustavu nerovnic

(1.)
$$\begin{aligned} x^2-2x-15 &\le 0 \\ 2x-6 &> 0 \end{aligned}$$

a) $x^2-2x-15 \le 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$



$\Rightarrow \quad x \in \langle -3, 5 \rangle$

b) $2x - 6 > 0$

$2x > 6$

$x > 3$

$x \in (3, \infty)$

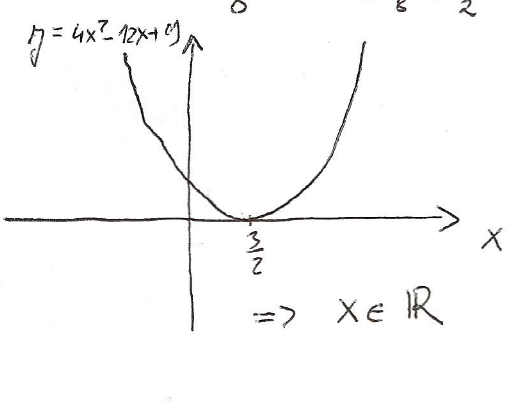
$$x \in \langle -3, 5 \rangle \cap (3, \infty)$$

$$\underline{\underline{x \in (3, 5\rangle}}$$

(2.)
$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &\ge 0 \\ -x^2 + 9 &\ge 0 \end{aligned}$$

a) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-144}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

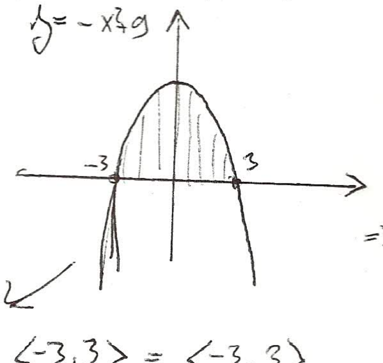


$\Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$

b) $-x^2 + 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$



$\Rightarrow \quad x \in \langle -3, 3 \rangle$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{R} \cap \langle -3, 3 \rangle = \langle -3, 3 \rangle}}$$

③

$$-(x^2-5x+6) \le 0$$
$$x^2-9x+20 \le 0$$

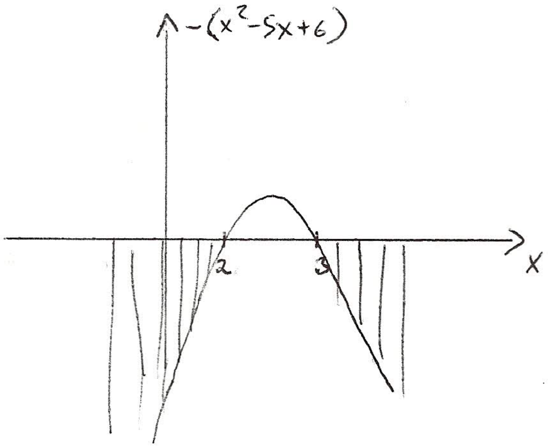
---

a) $-(x^2-5x+6) \le 0 \quad / \cdot (-1)$

$x^2-5x+6 \ge 0$

$x^2-5x+6=0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right.$$



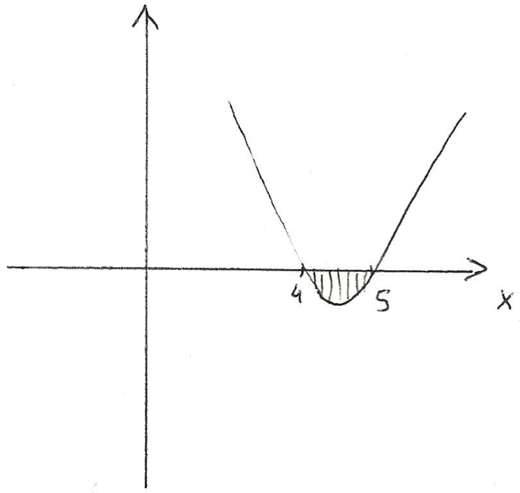
$\Rightarrow \quad x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 3, \infty)$

b)

$x^2-9x+20 \le 0$

$x^2-9x+20=0$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right.$$

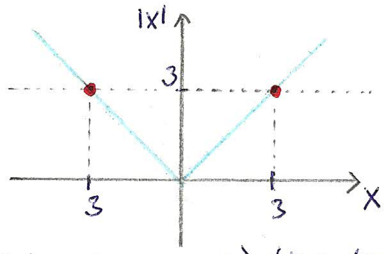


$x \in \langle 4, 5\rangle$

$$x \in \left[(-\infty, 2) \cup \langle 3, \infty)\right] \cap \langle 4, 5\rangle = \underline{\underline{\langle 4, 5\rangle}}$$

Př: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující dané rovnice a nerovnice.

1) $|x| = 3$



a) $\underline{| x \in (-\infty, 0) |}$ $\Rightarrow$ $|x| = -x$ (př. $|-3| = -(-3) = 3$)

$|x| = 3$

$-x = 3$

$\underline{\underline{x = -3}}$

b) $\underline{| x \in \langle 0, \infty) |}$ $\Rightarrow$ $|x| = x$ (př. $|5| = 5$)

$|x| = 3$

$\underline{\underline{x = 3}}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in \{-3; 3\}}}$

2) $|x| > 3$

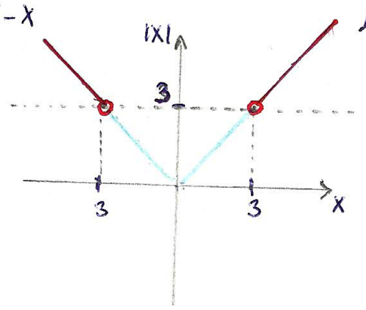
a) $\underline{| x \in (-\infty, 0) |}$ $\Rightarrow$ $|x| = -x$

$|x| > 3$

$-x > 3 \quad (\cdot(-1))$

$x < -3$

$\underline{x \in (-\infty, -3)}$



b) $\underline{| x \in \langle 0, \infty) |}$ $\Rightarrow$ $|x| = x$

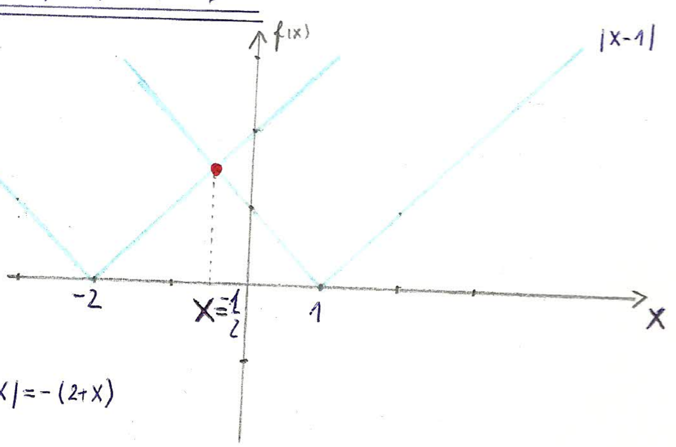
$|x| > 3$

$x > 3$

$\underline{x \in (3, \infty)}$

$\underline{\underline{x \in (3, \infty) \cup (-\infty, -3)}}$

3.) $|x - 1| = |2 + x|$



nulové body:

$-2 \qquad 1 \qquad x$

a) $\underline{| x \in (-\infty, -2) |}$ $\Rightarrow$ $|x-1| = -(x-1)$; $|2+x| = -(2+x)$

$-(x-1) = -(2+x)$

$-x+1 = -x-2$

$1 = -2$

$\Downarrow$

$\underline{\text{v intervalu } (-\infty, -2) \text{ rovnice nemá řešení}}$

b) $\underline{| x \in \langle -2, 1) |}$ $\Rightarrow$ $|x-1| = -(x-1)$
$|2+x| = 2+x$

$-(x-1) = 2+x$

$-x+1 = 2+x$

$-2x = 1$

$\underline{x = -\frac{1}{2}}$

c) $\underline{| x \in \langle 1, \infty) |}$ $\Rightarrow$ $|x-1| = x-1$
$|2+x| = 2+x$

$x - 1 = 2 + x$

$-1 = 2$

$\underline{\text{v intervalu } \langle 1, \infty) \text{ rovnice nemá řešení}}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$

4.) $|2x-6|-3 \geq -2|x-2|+1$

Nulové body:

$2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$
$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

a) $\boxed{x \in (-\infty, 2)} \Rightarrow |2x-6| = -(2x-6)$
$|x-2| = -(x-2)$

$-(2x-6)-3 \geq 2(x-2)+1$
$-2x+6-3 \geq 2x-4+1$
$-2x+3 \geq 2x-3$
$-4x \geq -6$
$x \leq \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \underline{x \in (-\infty, \tfrac{3}{2}\rangle \cap (-\infty, 2) = (-\infty, \tfrac{3}{2}\rangle}$

b) $\boxed{x \in \langle 2, 3)} \Rightarrow |2x-6| = -(2x-6)$
$|x-2| = x-2$

$-(2x-6)-3 \geq -2(x-2)+1$
$-2x+6-3 \geq -2x+4+1$
$3 \geq 5 \quad \Rightarrow$ Nerovnici nesplňuje ani jedno x z intervalu $\langle 2,3)$

c) $\boxed{x \in \langle 3, \infty)} \Rightarrow |2x-6| = 2x-6$
$|x-2| = x-2$

$2x-6-3 \geq -2(x-2)+1$
$2x-9 \geq -2x+5$
$4x-9 \geq 5$
$4x \geq 14$
$x \geq \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \underline{x \in (\tfrac{7}{2}, \infty) \cap \langle 3, \infty) = \langle \tfrac{7}{2}, \infty)}$

$\Rightarrow$ Nerovnice je splněna pro libovolné $\underline{x \in (-\infty, \tfrac{3}{2}\rangle \cup \langle \tfrac{7}{2}, \infty)}$

Př: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující dané rovnice a nerovnice

1) $2(x-1) + |2x-1| = 3 + |3x-6|$

Nulové body:

$$2x-1=0 \qquad 3x-6=0$$
$$2x=1 \qquad 3x=6$$
$$\underline{x=\tfrac{1}{2}} \qquad \underline{x=2}$$

a) $\underline{x \in (-\infty, \tfrac{1}{2})} \Rightarrow |2x-1| = -(2x-1)$, $|3x-6| = -(3x-6)$ (dosadíme např. $x=0 \Rightarrow 2x-1=-1<0$, $3x-6=-6<0$)

$$2(x-1) - (2x-1) = 3 - (3x-6)$$
$$2x-2-2x+1 = 3-3x+6$$
$$-1 = -3x+9$$
$$3x = 10$$
$$x = \frac{10}{3} = 3+\frac{1}{3} \notin (-\infty, \tfrac{1}{2})$$

$\Rightarrow$ rovnice nemá v intervalu $(-\infty, \tfrac{1}{2})$ řešení!

b) $\underline{x \in \langle \tfrac{1}{2}, 2)} \Rightarrow |2x-1| = (2x-1)$, $|3x-6| = -(3x-6)$

$$2(x-1)+(2x-1) = 3-(3x-6)$$
$$2x-2+2x-1 = 3-3x+6$$
$$4x-3 = 9-3x$$
$$7x = 12$$
$$\underline{x = \frac{12}{7}} \in \langle \tfrac{1}{2}, 2)$$

(je řešením rovnice)

c) $\underline{x \in \langle 2, \infty)} \Rightarrow |2x-1| = 2x-1$, $|3x-6| = 3x-6$

$$2(x-1)+(2x-1) = 3+3x-6$$
$$2x-2+2x-1 = 3x-3$$
$$4x-3 = 3x-3$$
$$x = 0 \notin \langle 2, \infty)$$

$\Rightarrow$ rovnice nemá v intervalu $\langle 2, \infty)$ řešení

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{12}{7}}}$$

(Je jediné řešení zadané rovnice)

2) $3|2x-6| + 4|x| \geq x - |x+1|$

$2x-6=0 \iff x=3$
$x=0 \iff x=0$
$x+1=0 \iff x=-1$

Nulové body:

a) $\underline{|x \in (-\infty,-1)|}$

$|2x-6| = -(2x-6)$
$|x| = -x$
$|x+1| = -(x+1)$

$-3(2x-6) - 4x \geq x + (x+1)$

$-6x + 18 - 4x \geq 2x + 1$

$-12x \geq -17$

$x \leq \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$ $\Rightarrow$ to splňují $\underline{\text{všechna } x \in (-\infty,-1)}$

b) $\underline{|x \in \langle -1,0)|}$

$|2x-6| = -(2x-6)$
$|x| = -x$
$|x+1| = x+1$

$-3(2x-6) - 4x \geq x - (x+1)$

$-6x + 18 - 4x \geq x - x - 1$

$-10x \geq -19 \quad |:(-10)$

$x \leq \frac{19}{10}$ $\Rightarrow$ to splňují $\underline{\text{všechna } x \in \langle -1,0)}$

c) $\underline{|x \in \langle 0,3)|}$ $\Rightarrow$

$|2x-6| = -(2x-6)$
$|x| = x$
$|x+1| = x+1$

$-3(2x-6) + 4x \geq x - (x+1)$

$-6x + 18 + 4x \geq -1$

$-2x \geq -19$

$x \leq \frac{19}{2} = 9 + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ to splňují $\underline{\text{všechna } x \in \langle 0,3)}$

d) $\underline{|x \in \langle 3,\infty)|}$ $|2x-6| = 2x-6$; $|x| = x$; $|x+1| = x+1$

$3(2x-6) + 4x \geq x - (x+1)$

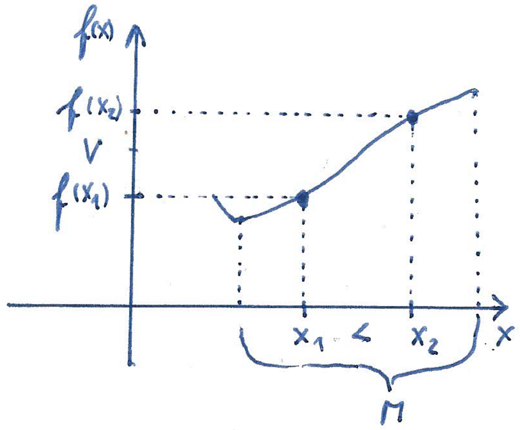
$6x - 18 + 4x \geq -1$

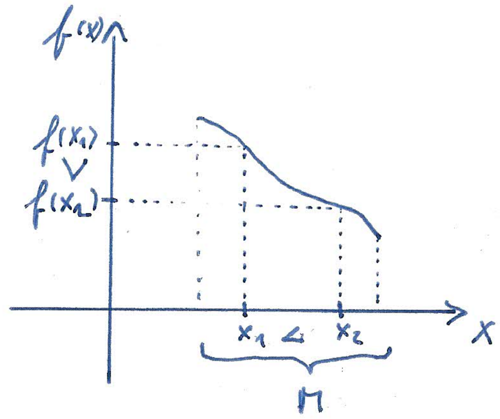
$10x \geq 17$

$x \geq \frac{17}{10} = 1{,}7$ $\Rightarrow$ to splňují $\underline{\text{všechna } x \in \langle 3,\infty)}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty,-1) \cup \langle -1,0) \cup \langle 0,3) \cup \langle 3,\infty) = \mathbb{R}}}$ (Nerovnost platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}$)

Vlastnosti funkcí





Def.: Funkce f je na množině $M \subseteq \mathbb{R}$

1.) rostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2.) neklesající $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

3.) klesající $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

4.) nerostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Př: a) Dokažte, že funkce $f(x) = 3x - 2$ je rostoucí na množině $M = \mathbb{R}$.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \; x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 2 < 3x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\square$

b) Dokažte, že funkce $f(x) = -5x + 3$ je klesající na množině $M = \mathbb{R}$.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \; x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow -5x_1 + 3 > -5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\square$

c) Dokažte, že funkce $f(x) = \dfrac{-2}{x+1}$ je na intervalu $M = (-\infty, -1)$ rostoucí.

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -1): \; x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \;\; \Big/ : \overbrace{\underbrace{(x_1+1)}_{<0} \cdot \underbrace{(x_2+1)}_{<0}}^{>0} \Rightarrow \dfrac{1}{x_2+1} < \dfrac{1}{x_1+1} \Rightarrow \dfrac{-2}{x_2+1} > \dfrac{-2}{x_1+1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\square$

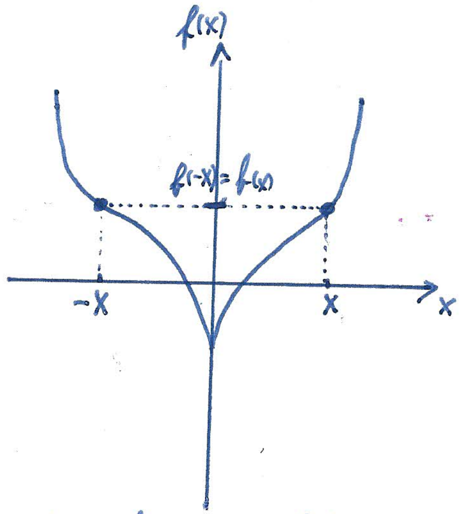
Poznámka: Funkce rostoucí a klesající se nazývají ryze monotonní.
Funkce nerostoucí a neklesající se nazývají monotonní.

Def.: Funkce f je

1.) sudá $\iff \forall x \in D_f: \quad f(x) = f(-x)$

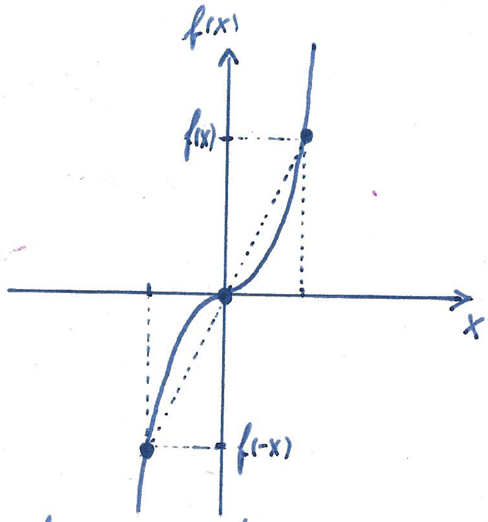
2.) lichá $\iff \forall x \in D_f: \quad f(x) = -f(-x)$

sudá funkce:



Má graf symetrický podle osy y.

lichá funkce:



Má graf symetrický podle počátku.

Př:

1.) $f(x) = x^2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ a platí:

$\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$

1.) $f(x) = x^3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ a platí:

$\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)$

2.) $f(x) = \ln x^2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ a:

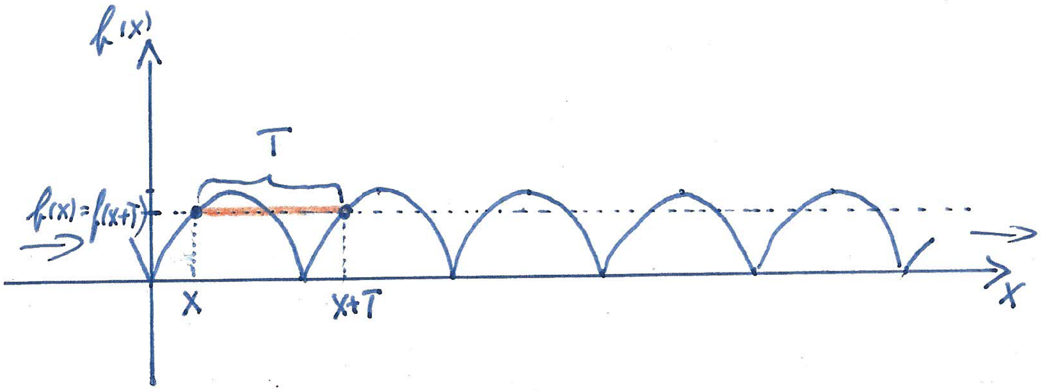
$\forall x \in D_f: \ f(x) = \ln x^2 = \ln(-x)^2 = f(-x)$

2.) Pozor! $f(x) = \ln x^3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \Rightarrow$

$\exists x = 1 \in D_f: \ f(1) = \ln 1^3 = \ln 1 = 0 \neq f(-1)$, neboť $f(-1)$ není definována $\Rightarrow$ není lichá!

Poznámka: Pokud funkce nemá svůj definiční obor symetricky rozložený na ose x podle počátku $\Rightarrow \exists x \in D_f: (f(x)$ existuje$) \wedge (f(-x)$ neexistuje$) \Rightarrow f(x) \neq \pm f(-x) \Rightarrow$ Taková funkce není ani lichá ani sudá!

(Např. $f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow f(-1) = -\frac{1}{2}$, ale $f(1)$ neexistuje!)

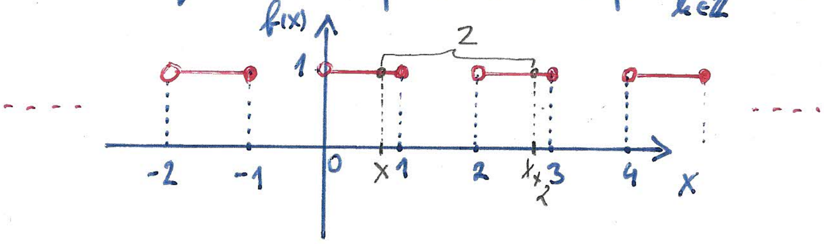


Def.: Funkce f je periodická právě když

$$\exists\, T \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D_f : \quad f(x) = f(x+T)$$

Poznámka: Kdybychom v definici napsali $T \in \mathbb{R}$, byly by všechny funkce periodické (stačilo by zvolit $T = 0$ a jistě by bylo $\forall x \in D_f$ splněno $f(x) = f(x+T)$)!

Příklady periodických funkcí: $\sin x$ $(T = 2\pi)$; $\cos x$ $(T = 2\pi)$; $\operatorname{tg} x$ $(T = \pi)$, ale také funkce $f(x) = 1$, $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k, 2k+1\rangle$; její graf:



$\Rightarrow T = 2$

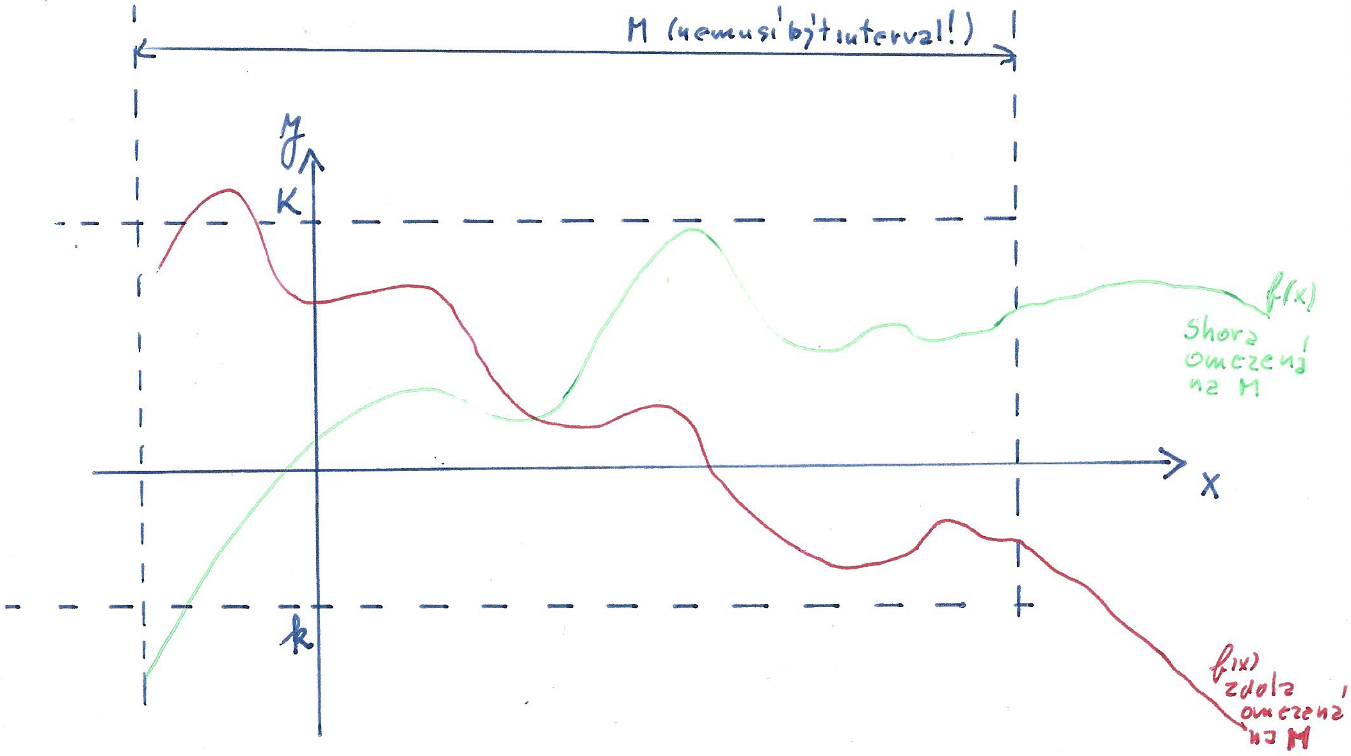
Př: Dokažte, že funkce $f(x) = x^2 + 2x + 3$ není periodická.

D: Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že je, tzn., že $\exists T \in \mathbb{R}^+$ takové, že $\forall x \in D_f$ $f(x) = f(x+T)$

Protože $D_f = \mathbb{R}$, musí být rovnost $f(x) = f(x+T)$ splněna i pro $x = 0$ $\Rightarrow$

$$f(0) = f(0+T)$$
$$\Downarrow$$
$$\cancel{3} = T^2 + 2T \cancel{+3}$$
$$\Downarrow$$
$$T^2 + 2T = 0$$
$$\Downarrow$$
$$T(T+2) = 0 \Rightarrow T = \begin{cases} 0 & \text{ale } T \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow T \neq 0 \\ \text{nebo} & \\ -2 & \text{ale } T \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow T \neq 0 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow \text{žádné takové } T \text{ neexistuje} \Rightarrow \text{spor!}$$

$\square$



Def.: Funkce f je na množině $M \subseteq D_f$

1.) shora omezená $\Leftrightarrow$ je shora omezená množina $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$, tzn.:

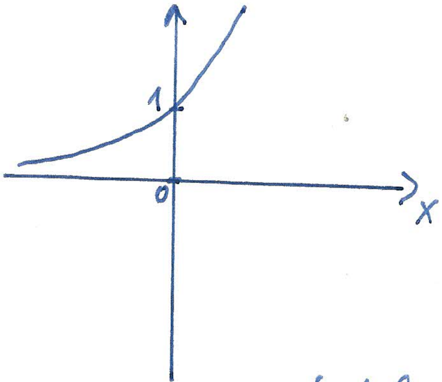
$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : f(x) < K$$

2.) zdola omezená $\Leftrightarrow$ je zdola omezená množina $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$, tzn.:

$$\exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : f(x) > k$$

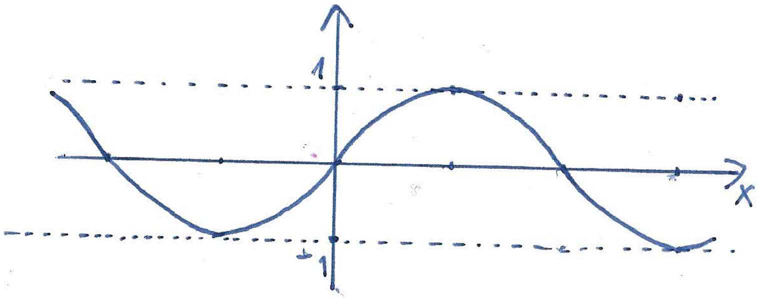
3.) omezená $\Leftrightarrow$ je na M omezená shora i zdola.

Př.: 1.) $f(x) = e^x$



Na $M = \mathbb{R}$ je omezená zdola (např. $k = 0$), ale není omezená shora. Na $M = (-\infty, 0)$ by ale byla omezená (!) neboť $\forall x \in (-\infty, 0) : 0 < e^x < 2$

2.) $f(x) = \sin x$



je na $M = \mathbb{R}$ omezená (zdola i shora) neboť $\forall x \in \mathbb{R} : \underset{k}{-1{,}5} < \sin x < \underset{K}{38}$