Exponenciální funkce

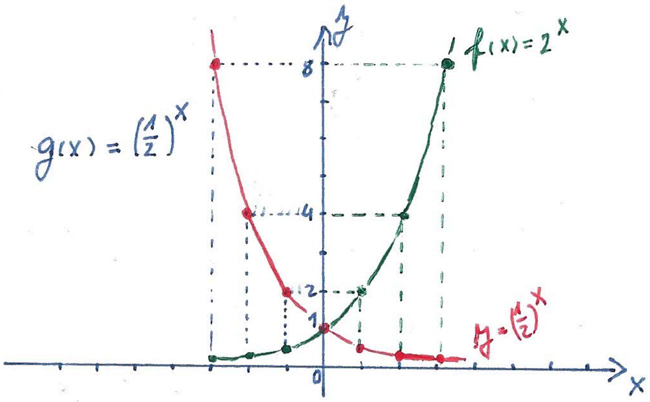
$f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln a}$

(x ← exponent; a ← základ $\in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = (0, \infty)$;

- je prostá
- je omezená zdola
- není sudá ani lichá
- není periodická

Př.: Načrtněte graf funkce $f(x) = 2^x$ a $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Př.: Vyřešte exponenciální rovnici:

1.) $5^{3x+2} = 25^{x+1}$

$5^{3x+2} = (5^2)^{x+1}$

$3x+2 = 2x+2$

$x = 0$

2.) $8^x = 16^{2-x}$

$(2^3)^x = (2^4)^{2-x}$

$3x = 8-4x$

$x = \frac{8}{7}$

3.) $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$

$3^{x-2} = (3^{-1})^{-2x}$

$x-2 = 2x$

$x = -2$

4.) $2^{3x-4} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+1}$

$2^{3x-4} = (2^{-3})^{x+1}$

$3x-4 = -3x-3$

$x = \frac{1}{6}$

5.) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1\,(10^{x-1})^5$

$10^x = 10^{-1} \cdot 10^{5x-5}$

$10^x = 10^{5x-6}$

$x = 5x-6$

$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

6.) $4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$

$20^x \cdot 5 = 5 \cdot 20^{2-x}$

$x = 2-x$

$x = 1$

Logaritmická funkce

$\log_a x = y \iff a^y = x$

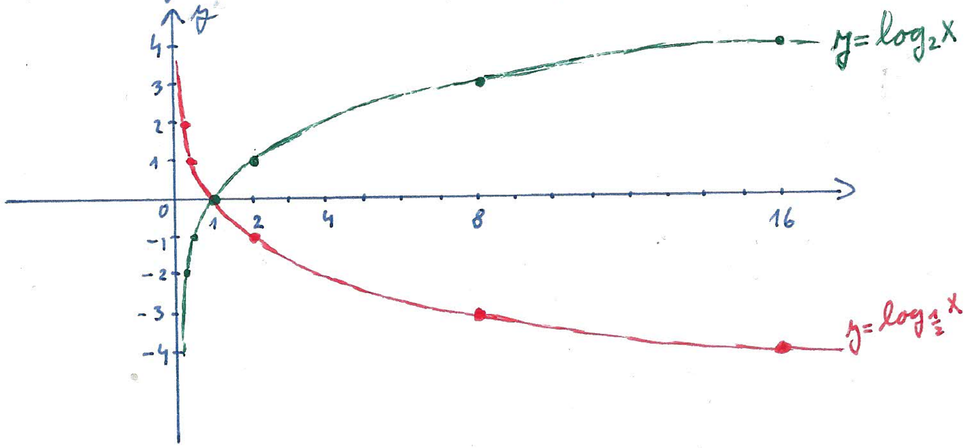
↖ základ logaritmu $\in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$D(f) = (0, \infty)$; $H(f) = \mathbb{R}$

- je prostá ; - není: sudá, lichá, periodická, omezená

- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Př.: Načrtněte graf funkce $f(x) = \log_2(x)$; $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



Př.: Vyřešte logaritmickou rovnici:

1.) $x = \log_2 16$

$x = \log_2(2^4) = \underline{\underline{4}}$

2.) $x = \log_3 27$

$x = \log_3(3^3) = \underline{\underline{3}}$

3.) $x = \log_{\frac{1}{3}} 3$

$x = \log_{\frac{1}{9}}(9^{\frac{1}{2}}) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

4.) $x = \log_3 18 + \log_3 \frac{3}{2}$

$x = \log_3 18 \cdot \frac{3}{2} = \log_3 27 = \underline{\underline{3}}$ ($27 = 3^3$)

5.) $x = \log_{10} 500 - \log_{10} 5$

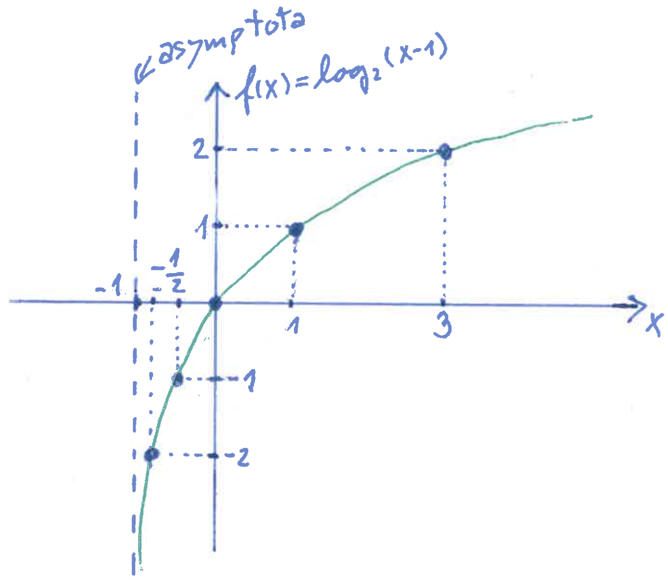
$x = \log_{10} \frac{500}{5} = \log_{10} 10^2 = \underline{\underline{2}}$

6.) $x = \log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_5 \frac{1}{125}$

$x = -1 + (-3) = \underline{\underline{-4}}$

Př. Načrtněte graf funkce

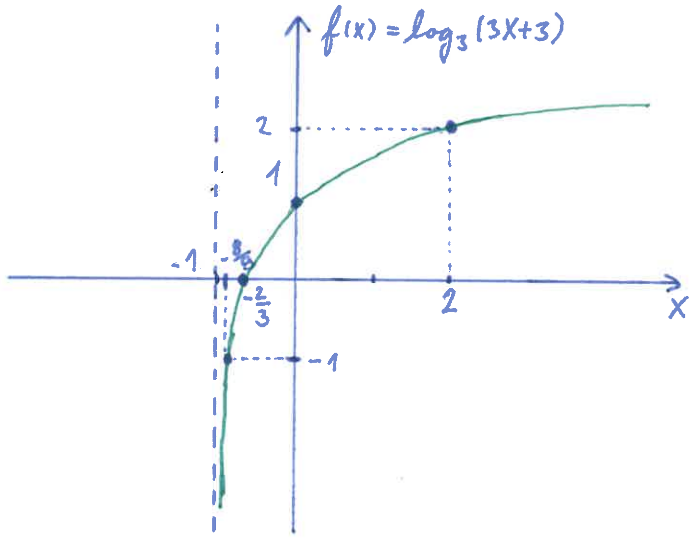
1.) $f(x) = \log_2 (x+1)$



- stejný graf jako u funkce $\log_2 x$, ale posunutý o 1 doleva

$D_f = (-1, \infty)$

2.) $f(x) = \log_3 (3x+3)$



průsečík s osou y: $f(0) = \log_3 (\overbrace{3\cdot 0+3}^{3}) = 1$

průsečík s osou x: $\log_3(3x+3) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$3x+3 = 3^0 = 1$$
$$3x = -2$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

asymptota: tamikde $3x+3 = 0$

definiční obor: tamikde $3x+3>0 \Rightarrow x>-1$

Kde vyjde $f(x) = \log_3(3x+3) = 2$? $\Leftrightarrow$

$$3x+3 = 3^2$$
$$3x+3 = 9$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

$f(x) = \log_3(3x+3) = -1$? $\Leftrightarrow$

$$3x+3 = 3^{-1}$$
$$3x+3 = \frac{1}{3}$$
$$3x = \frac{1}{3} - 3 \quad |:3$$
$$x = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$$

Př. Vyriešte exponenciální rovnici:

1.) $3^{x+1} = 2^{2x+3}$

$3 \cdot 3^x = 8 \cdot 2^{2x}$

$3 \cdot 3^x = 8 \cdot 4^x$

$\frac{3^x}{4^x} \quad \frac{8}{3}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{8}{3} \quad / \ln$

$\ln\left(\frac{3}{4}\right)^x = \ln \frac{8}{3}$

$x \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln \frac{8}{3}$

$x = \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\ln\left(\frac{8}{3}\right)}$

2.) $5^{2x-3} = 8^{3x+7} \quad / \ln$

$\ln 5^{2x-3} = \ln 8^{3x+7}$

$(2x-3) \ln 5 = (3x+7) \ln 8$

$(2\ln 5)x - 3\ln 5 = (3 \cdot \ln 8)x + 7 \cdot \ln 8$

$x(2\ln 5 - 3\ln 8) = 7 \cdot \ln 8 + 3\ln 5$

$x(\ln 5^2 - \ln 8^3) = \ln 8^7 + \ln 5^3$

$x \ln \frac{5^2}{8^3} = \ln 8^7 \cdot 5^3$

$x = \frac{\ln 8^7 \cdot 5^3}{\ln \frac{5^2}{8^3}}$

Př. Vyriešte exponenciální nerovnici:

1.) $3^{2x} > 5^{x-1} \quad / \ln$

$\ln 3^{2x} > \ln 5^{x-1}$

$2x \cdot \ln 3 > (x-1) \ln 5$

$x \cdot \ln 3^2 > x \cdot \ln 5 - \ln 5$

$x(\ln 9 - \ln 5) > -\ln 5$

$x > \frac{-\ln 5}{\ln \frac{9}{5}}$

$x \in \left(-\frac{\ln 5}{\ln \frac{9}{5}}, \infty\right)$

2.) $2^{8x-1} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{4x+6}$

$2^{8x-1} \le (3^{-1})^{4x+6}$

$2^{8x-1} \le 3^{-4x-6} \quad / \ln$

$\ln 2^{8x-1} \le \ln 3^{-4x-6}$

$(8x-1) \ln 2 \le (-4x-6) \ln 3$

$8x \ln 2 - \ln 2 \le -4x \ln 3 - 6 \ln 3$

$x \ln 2^8 - \ln 2 \le x \ln 3^{-4} - \ln 3^6$

$x(\ln 2^8 - \ln 3^{-4}) \le \ln 2 - \ln 3^6$

$x \ln \frac{2^8}{3^{-4}} \le \ln \frac{2}{3^6}$

$x \ln(2^8 \cdot 3^4) \le \ln(2 \cdot 3^{-6})$

$x \le \frac{\ln(2 \cdot 3^{-6})}{\ln(2^8 \cdot 3^4)}$

$x \in \left(-\infty, \frac{\ln(2 \cdot 3^{-6})}{\ln(2^8 \cdot 3^4)}\right\rangle$

Př. Vyřešte logaritmickou rovnici.

1.) $\log_2 (\underbrace{4x+8}) = 2$ $\Rightarrow x \in (-2,\infty)$

$4x + 8 = 2^2$

$4x = -4$

$\underline{\underline{x = -1}}$

2.) $\log_{10} x - \log_{10} 5 = 2$ $\Rightarrow x \in (0,\infty)$

$\log_{10} \frac{x}{5} = 2$

$\frac{x}{5} = 10^2$

$\underline{\underline{x = 500}}$

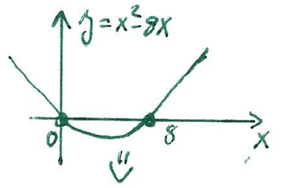
3.) $\log_3 (x^2 - 8x) = 2$

$x^2 - 8x = 3^2$

$x^2 - 8x - 9 = 0$

$(x-9)(x+1) = 0$

$x = \left< \begin{matrix} \underline{\underline{9}} \\ \underline{\underline{-1}} \end{matrix} \right.$



$\Downarrow$

$x \in (-\infty, 0) \cup (8, \infty)$

4.) Pozn.: U tohoto typu příkladu:

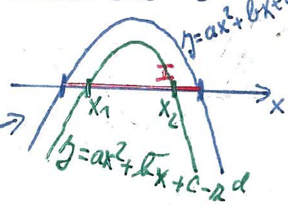
$\log_k (ax^2 + bx + c) = d$

musí I.) $x \in I = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$ pro $a < 0$

a $ax^2 + bx + c = k^d \Rightarrow ax^2 + bx + c - k^d = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - k^d)}}{2a}}} \in I$

jistě



II.) pro $a > 0$ analogicky

Pozn. U typu př. jako v 1.) nalezené x také bude vždy vyhovovat.

Př. Vyřešte nerovnici:

1.) $\log_3 (-3x + 9) > 2$

I.) x musí splňovat: $-3x + 9 > 0$

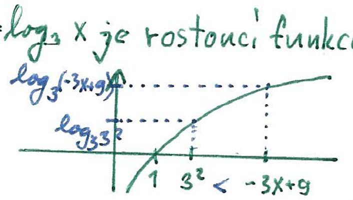
$-3x > -9 \quad /:(-3)$

$\underline{x < 3}$

II.) $\log_3 (-3x + 9) > 2$

$\log_3 (-3x + 9) > \log_3 (3^2)$

($y = \log_3 x$ je rostoucí funkce:



)

$-3x + 9 > 3^2 \quad /-9$

$-3x > 0 \quad /:(-3)$

$\underline{x < 0}$

$\Rightarrow$ z I.) a II.): $\underline{\underline{x \in (-\infty, 0)}}$

2.) $\log_{\frac{1}{2}} (-5x + 10) > 3$

I.) x musí splňovat: $-5x + 10 > 0$

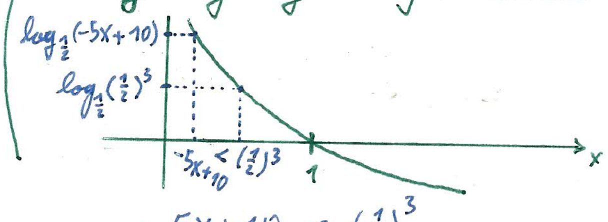
$-5x > -10 \quad /:(-5)$

$\underline{x < 2}$

II.) $\log_{\frac{1}{2}} (-5x + 10) > 3$

$\log_{\frac{1}{2}} (-5x + 10) > \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^3$

($y = \log x$ je klesající funkce:



)

$-5x + 10 < (\frac{1}{2})^3$

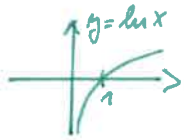
$-5x + 10 < \frac{1}{8}$

$x > \frac{\frac{1}{8} - 10}{-5} = \frac{-\frac{79}{8}}{-5} = \frac{79}{40}$

$\Rightarrow$ z I.) a II.): $\underline{\underline{x \in (\frac{79}{40}, 2)}}$

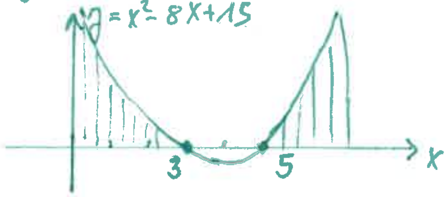
Př. Urči definiční obor funkce dané předpisem.

1.) $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 15)$

Do logaritmu můžeme „dosazovat" jen čísla větší než 0 () =>

$x^2 - 8x + 15 > 0$

$(x-3)(x-5) > 0$



$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)}}$$

2.) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$

Do logaritmu „dosazujeme" jen kladná čísla. $\wedge$ Pod zlomkovou čarou nesmí být 0.

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\boxed{x - 1 > 0}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{\ln(x-1) \neq 0}$

Zjistíme, kdy:

$\ln(x-1) = 0$

$\ln \square = 0 \Leftrightarrow \square = 1$

$x - 1 = 1$

$x = 2$

$\Downarrow$

$\underline{x \neq 2}$

$x > 1$

$\underline{x \in (1, \infty)}$

Podmínky musí být splněny obě současně =>

$$\underline{\underline{D_f = (1, 2) \cup (2, \infty)}}$$

Př.: Určete definiční obor funkce dané předpisem:

1.) $f(x) = \dfrac{3x+1}{\log_2(x^2-5x)}$

Do logaritmu nesmíme dosazovat čísla ≤ 0. $\wedge$ Pod zlomkovou čarou nesmí být 0.

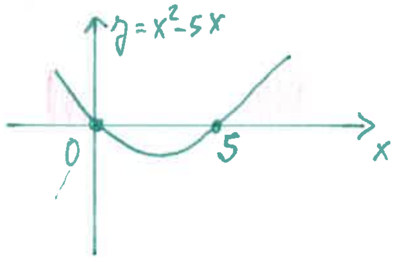
$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$x^2-5x>0$ $\quad\wedge\quad$ $\log_2(x^2-5x) \neq 0$

Podmínka 1:

$x(x-5)>0$

($x(x-5) = y$)

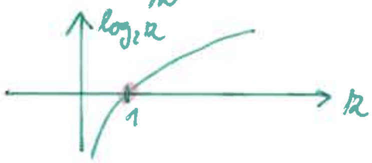


$\Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (5, \infty)$

Podmínka 2:

Zjistíme, kdy:

$\log_2(\underbrace{x^2-5x}_{k}) = 0$



$\log_2 k = 0 \iff k = 1$

$x^2-5x = 1$

$x^2-5x-1 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} > 5 \\ \dfrac{5-\sqrt{29}}{2} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x \neq \dfrac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

Podmínky musí být splněny obě $\Rightarrow$

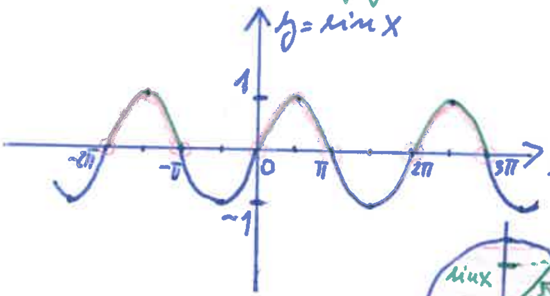
$$D_f = \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}, 0\right) \cup \left(5, \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}, \infty\right).$$

Př. Určete definiční obor funkce dané předpisem.

1.) $f(x) = \ln(\underbrace{\sin x}_{y})$

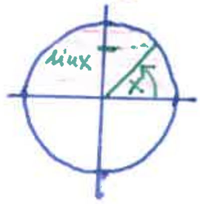
$\sin x$ je definován pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, ale $\ln y$ jen pro kladná y.

$\sin x > 0$



$\Rightarrow x \in (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi)$

ale také $(-2\pi, -\pi) \cup (-4\pi, -3\pi)$
⋮



$D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$

2.) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{1 - \cos x}$

Logaritmus je definován jen pro kladná čísla. $\wedge$ Vejmenovateli nesmí být 0.

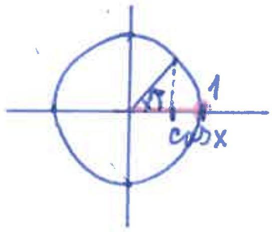
$x + 1 > 0$

$x > -1$

$x \in (-1, \infty)$

$1 - \cos x \neq 0$

$\cos x \neq 1$



$\Rightarrow$

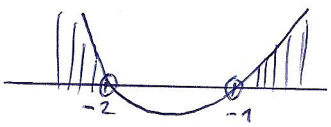
$\Rightarrow x \neq k \cdot 2\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad D_f = (-1, \infty) - \{k 2\pi \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

Př: Určete def. obor funkce $f(x) = \sqrt{-\ln(x^2+3x+2)}$

I.) $x^2+3x+2>0$

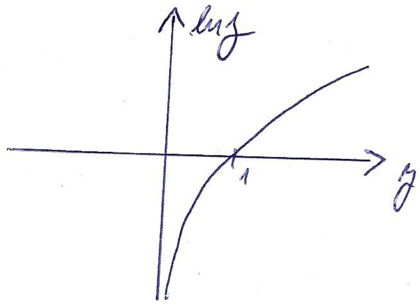
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases}\frac{-3+1}{2}=-1\\ \frac{-3-1}{2}=-2\end{cases}$$



$\underline{x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)}$

II.) $-\ln(x^2+3x+2)\geq 0$

$\ln(\overbrace{x^2+3x+2}^{s})\leq 0$



$$0<x^2+3x+2\leq 1$$

$\underbrace{0<x^2+3x+2,}$

steiná nerovnice jako v I.)

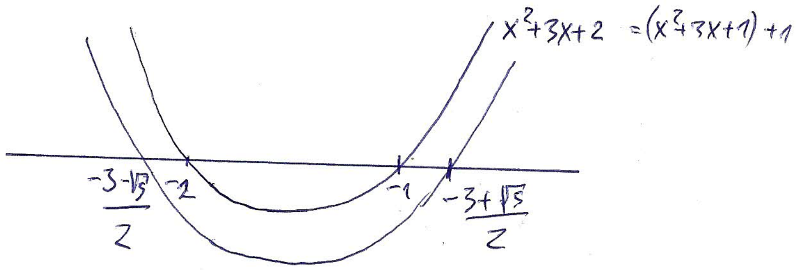
$\underline{x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)}$

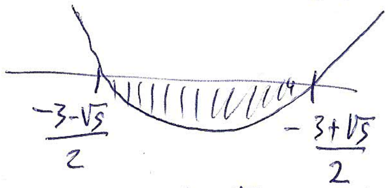
$x^2+3x+2\leq 1$

$x^2+3x+1\leq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\begin{cases}\frac{-3+\sqrt5}{2}\\ \frac{-3-\sqrt5}{2}\end{cases}$$

~~$x\in\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt5}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{-3+\sqrt5}{2},\infty\right)$~~





$\underline{x\in\left\langle\frac{-3-\sqrt5}{2},\frac{-3+\sqrt5}{2}\right\rangle}$

$$\Rightarrow\quad x\in\big((-\infty,-2)\cup(-1,\infty)\big)\cap\left\langle\frac{-3-\sqrt5}{2},\frac{-3+\sqrt5}{2}\right\rangle=$$

$$=\left\langle\frac{-3-\sqrt5}{2},-2\right)\cup\left(-1,\frac{-3+\sqrt5}{2}\right\rangle$$