Analytická geometrie v E_3

E ... euklidovský trojrozměrný prostor

$B = \{ [x_1, x_2, x_3] \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3$ ... množina bodů

$V = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3$ ... množina vektorů

Poznámka: Abychom body odlišili od vektorů, používáme u bodů hranaté závorky a u vektorů kulaté.

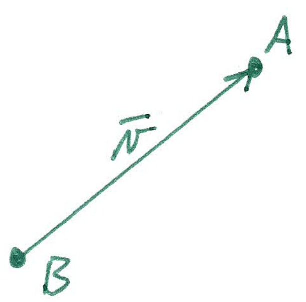
Na množině bodů zavádíme operaci $- : B \times B \Rightarrow V$ předpisem

$$[a_1, a_2, a_3] - [b_1, b_2, b_3] = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

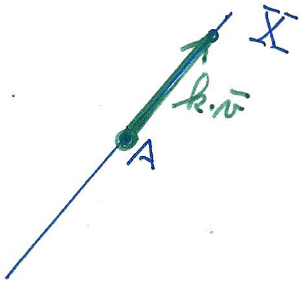
Př.: Určete rozdíl bodů $A = [3, 1, 4]$ a $B = [2, -1, 1]$.

Výsledkem je vektor $A - B = [3, 1, 4] - [2, -1, 1] = \underline{\underline{(1, 2, 3)}}.$

Poznámka: Fakt, že $A - B = \vec{v}$ můžeme také formálně zapsat jako $A = B + \vec{v}$.



Vektorová rovnice přímky p : Je-li dána bodem $A=[a_1,a_2,a_3]$ a vektorem $\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)$. Pak :



$$p: X = A + k\cdot\bar{v}$$

nebo rozepsáno pomocí souřadnic :

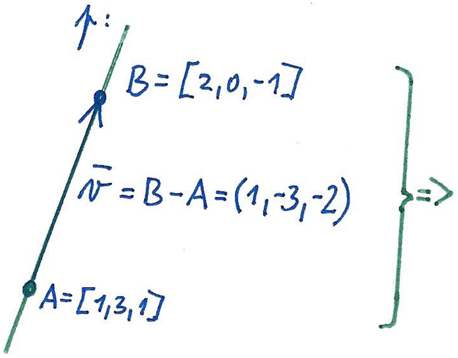
$$p: [x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + k(v_1, v_2, v_3)$$

Parametrické rovnice přímky p: Obdržíme je, rozepíšeme-li vektorovou rovnici pro jednotlivé souřadnice bodu X:

$$p: \begin{array}{l} x_1 = a_1 + k v_1 \\ x_2 = a_2 + k v_2 \\ x_3 = a_3 + k v_3 \end{array}$$

$$\underbrace{x_i}_{X} \qquad \underbrace{a_i}_{A} \qquad \underbrace{v_i}_{\bar{v}}$$

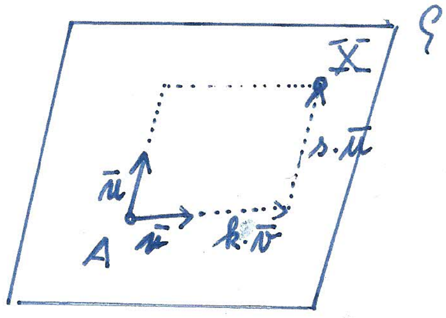
Př: Určete vektorovou rovnici a parametrické rovnice přímky, která je dána body $A=[1,3,1]$ a $B=[2,0,-1]$.



Vektorová rovnice : $p: X=[1,3,1]+k(1,-3,-2)$

Parametrické rovnice:
$$p: \begin{array}{l} x_1 = 1 + k \\ x_2 = 3 - 3k \\ x_3 = 1 - 2k \end{array}$$

Vektorová rovnice roviny ϱ: Je-li dána bodem $A=[a_1,a_2,a_3]$ a dvěma vektory $\bar{u}=(u_1,u_2,u_3)$ a $\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)$:



$$\varrho:\ X = A + s.\bar{u} + k.\bar{v}$$

neboli:

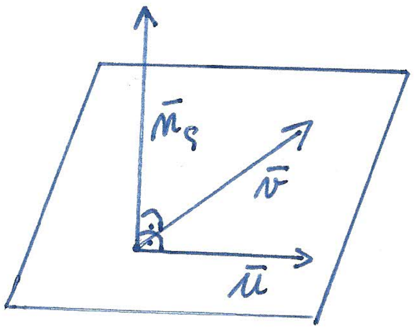
$$\varrho:\ [x_1,x_2,x_3] = [a_1,a_2,a_3] + s(u_1,u_2,u_3) + k(v_1,v_2,v_3)$$

Pozor! Vektory $\bar{u}$ a $\bar{v}$ nesmí být násobky jeden druhého!

Parametrické rovnice roviny ϱ: Rozepíšeme vektorovou rovnici po souřadnicích:

$$\varrho:\ \begin{aligned} x_1 &= a_1 + s u_1 + k v_1 \\ x_2 &= a_2 + s u_2 + k v_2 \\ x_3 &= a_3 + s u_3 + k v_3 \end{aligned}$$

Obecná rovnice roviny ϱ: Obecná rovnice roviny ϱ má tvar:



$$\varrho:\ ax + by + cz + d = 0$$

nebo, použijeme-li značení souřadnic: $x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z$

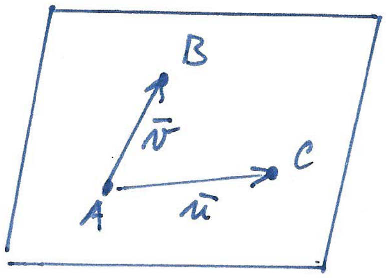
$$\varrho:\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

Obecnou rovnici můžeme získat z parametrických rovnic eliminací parametrů s a k, nebo s využitím faktu, že

$$(a,b,c) = \bar{n}_\varrho = k.(\bar{u}\times\bar{v})$$

$\bar{n}_\varrho$... normálový vektor roviny ϱ. Je kolmý na $\bar{u}$ i $\bar{v}$.

Př. Rovina ρ je dána body $A=[1,2,1]$; $B=[0,1,2]$; $C=[1,-1,3]$.



a) Určete vektorovou rovnici roviny ρ:

$$\left.\begin{aligned}\bar{u} &= C-A = [1,-1,3]-[1,2,1] = (0,-3,2)\\ \bar{v} &= B-A = [0,1,2]-[1,2,1] = (-1,-1,1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\rho:\ X = [1,2,1] + s(0,-3,2) + k(-1,-1,1)$$

b) Určete parametrické rovnice roviny ρ:

$$\rho:\ \begin{aligned} x_1 &= 1-k\\ x_2 &= 2-3s-k\\ x_3 &= 1+2s+k\end{aligned}$$

c) Určete obecnou rovnici roviny ρ: $ax+by+cz+d=0$

α) Eliminací parametrů:

$x_1 = 1-k \quad | \Rightarrow k = 1-x_1$
$x_2 = 2-3s-k$ ← dosadíme
$x_3 = 1+2s+k$

$x_2 = 2-3s-1+x_1$
$x_3 = 1+2s+1-x_1$

$x_2 = 1-3s+x_1 \quad |\cdot 2$
$x_3 = 2+2s-x_1 \quad |\cdot 3$

$\left.\begin{aligned}2x_2 &= 2-6s+2x_1\\ 3x_3 &= 6+6s-3x_1\end{aligned}\right\}$ rovnice sečteme

$2x_2+3x_3 = 8-x_1$

$\rho:\ x_1+2x_2+3x_3-8=0$

β) Pomocí normálového vektoru

Zvolím $(a,b,c) = \bar{n}_\rho = \bar{u}\times\bar{v}$.

$$\bar{u}\times\bar{v} = (0,-3,2)\times(-1,-1,1) =$$

$$= \left(\underbrace{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}}_{-3-(-2)},\ \underbrace{-\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}}_{-(0-(-2))},\ \underbrace{\begin{vmatrix}0 & -3\\ -1 & -1\end{vmatrix}}_{0-(-1)(-3)}\right) =$$

$$= (-1,-2,-3) = (a,b,c) \Rightarrow$$

$$\rho:\ -x-2y-3z+d=0$$

Využiji toho, že $A=[1,2,1]\in\rho$. Tj. dosadím $x=1$, $y=2$, $z=1$:

$$-1\cdot 1-2(2)-3\cdot 1+d=0$$
$$-8+d=0 \Rightarrow d=8 \Rightarrow$$

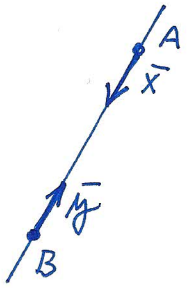
$$\rho:\ -x-2y-3z+8=0$$

Poznámka: Všimněme si, že ρ může mít nekonečně mnoho různých obecných rovnic – stačí ji vynásobit nenulovým číslem...

Vzájemná poloha dvou přímek v E_3.

Uvažujme přímky p: $X = A + t\bar{x}$ a q: $X = B + s\bar{y}$.
Jejich vzájemná poloha v E_3 může být následující:

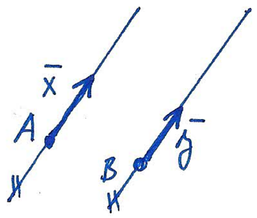
1.) p a q jsou incidentní (totožné) $\Leftrightarrow$ $p \cap q = p = q$



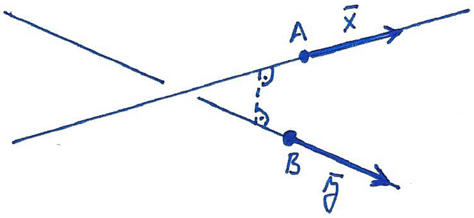
platí:

$A - B = k_1 \bar{x} = k_2 \bar{y}$

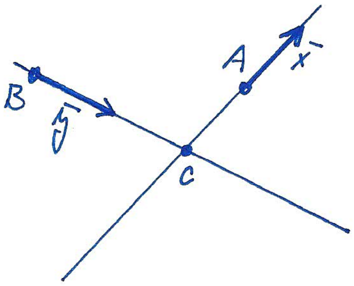
2.) p a q jsou rovnoběžné různé $\Leftrightarrow$ $(p \cap q = \emptyset \wedge \bar{x} = k\bar{y})$



3.) p a q jsou mimoběžné $\Leftrightarrow$ $(p \cap q = \emptyset \wedge \bar{x} \neq k \cdot \bar{y})$



4.) p a q jsou různoběžné $\Leftrightarrow$ $p \cap q = \{C\}$

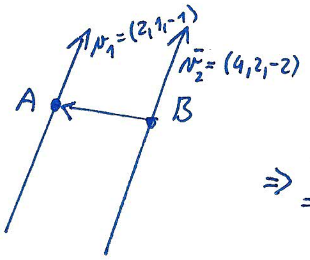


bod C nazveme průsečíkem p a q.

Př.: Určete vzájemnou polohu přímek $p: X = \underbrace{[1,-1,3]}_{A} + t\,\underbrace{(2,1,-1)}_{v_1}$ a $q: X = \underbrace{[1,2,-1]}_{B} + s\,\underbrace{(4,2,-2)}_{v_2}$

Řešení: Vektor $(4,2,-2) = 2\cdot(2,1,-1)$. Přímky p a q jsou proto buď incidentní, nebo rovnoběžné různé.

Určíme $A-B$:



$$A - B = [1,-1,3] - [1,2,-1] = (0,-3,4) \neq k(2,1,-1)$$

$\Rightarrow$ **Přímky p a q jsou rovnoběžné různé.**

Př.: Určete vzájemnou polohu přímek $p: X = [1,2,1] + t(3,1,4)$; $q: X = [-2,1,-3] + s(3,1,2)$.

Řešení: Vektor $(3,1,4) \neq k\cdot(3,1,2)$. Proto jsou p a q buď různoběžné, nebo mimoběžné. Určíme $p \cap q$:

$$p: \begin{aligned} x_1 &= 1+3t \\ x_2 &= 2+t \\ x_3 &= 1+4t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x_1 &= -2+3s \\ x_2 &= 1+s \\ x_3 &= -3+2s \end{aligned} \quad \Big\} \Rightarrow \text{hledáme } s, t \text{ tak, aby:}$$

$$\begin{aligned} 1+3t &= -2+3s \\ 2+t &= 1+s \\ 1+4t &= -3+2s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3t-3s &= -3 \quad /:3 \\ t-s &= -1 \\ 4t-2s &= -4 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} t-s &= -1 \\ t-s &= -1 \end{aligned}\right\} \text{stejné rovnice!}$$
$$4t-2s = -4$$

$$\begin{aligned} t-s &= -1 \\ 4t-2s &= -4 \quad \text{/ přičteme (-4) násobek 1. rovnice} \end{aligned}$$

$0t + 2s = 0 \Rightarrow \underline{s = 0} \leftarrow$ dosadíme do rovnic q

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow G = [-2,1,-3]$ je průsečík p a q

$\Rightarrow$ **Přímky p a q jsou různoběžné.**

Př: Určete vzájemnou polohu přímek $p: X=[1,2,1]+t(1,1,-1)$ a $q: X=[1,3,0]+s(1,1,1)$

Řešení: $(1,1,-1)\neq k(1,1,1) \Rightarrow$ p a q jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné.

Určíme $p\cap q$: Hledáme $X=[x_1,x_2,x_3]$ patřící p i q

$$p: \begin{aligned} x_1 &= 1+t \\ x_2 &= 2+t \\ x_3 &= 1-t \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x_1 &= 1+s \\ x_2 &= 3+s \\ x_3 &= s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1+t &= 1+s \\ 2+t &= 3+s \\ 1-t &= s \end{aligned}$$

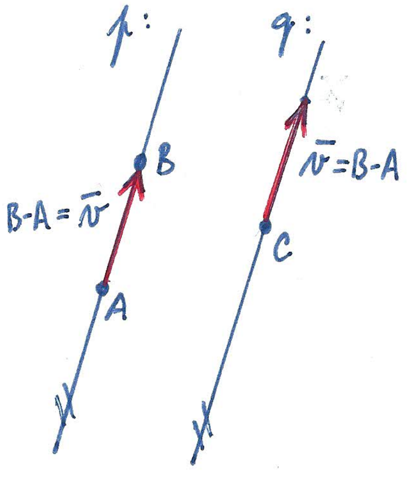
$$\left.\begin{aligned} t-s &= 0 \\ t-s &= -1 \\ -t-s &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0=-1$$

Spor! s předpokladem, že nějaké $X\in p\cap q \Rightarrow$

$\Rightarrow p\cap q=\emptyset \Rightarrow$ p a q jsou mimoběžné.

Př: Přímka p je dána dvěma body $A=[1,3,1]$ a $B=[-1,2,1]$. Určete parametrické rovnice přímky q, která je s p rovnoběžná a prochází bodem $C=[2,1,-1]$.

Řešení:



$B-A=\vec{v}=[-1,2,1]-[1,3,1]=(-2,-1,0) \Rightarrow$

$q: X=C+k\vec{v}$

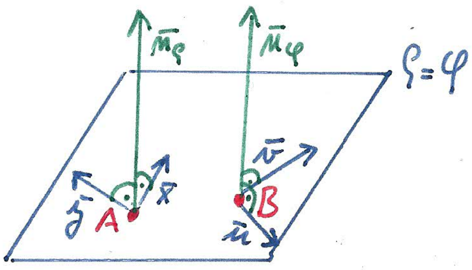
$$q: \begin{aligned} x_1 &= 2-2k \\ x_2 &= 1-k \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Vzájemná poloha dvou rovin v E_3.

Uvažujme roviny $\rho: X = A + k_1 \bar{x} + k_2 \bar{y}$ a
$\varphi: X = B + s_1 \bar{u} + s_2 \bar{v}$

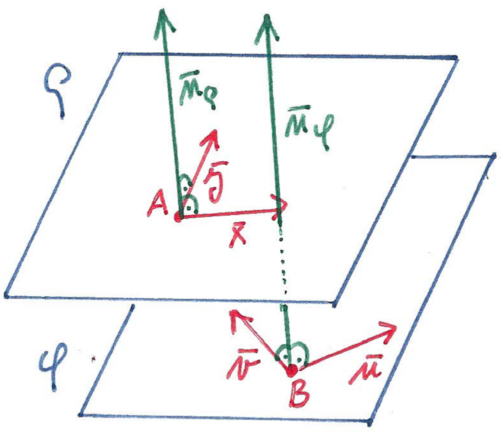
V E_3 mohou zaujmout následující vzájemné polohy:

1.) Incidentní (totožné): $\rho \cap \varphi = \rho = \varphi$



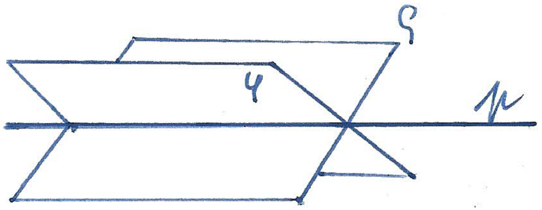
$\rho = \varphi \Leftrightarrow (\bar{n}_\rho = k\, \bar{n}_\varphi \wedge A \in \varphi)$

2.) Rovnoběžné různé: $\rho \cap \varphi = \emptyset \wedge \bar{n}_\rho = k \cdot \bar{n}_\varphi$



$\rho \parallel \varphi \Leftrightarrow (\bar{n}_\rho = k\, \bar{n}_\varphi \wedge A \notin \varphi)$

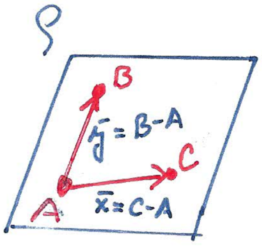
3.) Různoběžné: $\rho \cap \varphi = p$ ... průsečnice

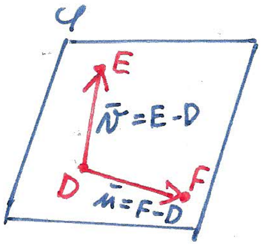


$\bar{n}_\rho \neq k\, \bar{n}_\varphi$

Př: Rovina ρ je dána body $A=[1,-1,3]$, $B=[2,1,1]$ a $C=[0,1,1]$. Rovina φ je dána body $D=[0,1,3]$, $E=[2,1,-1]$, $F=[3,1,4]$.

a) Určete vzájemnou polohu rovin ρ a φ.





Určíme $\vec{n}_\rho$ a $\vec{n}_\varphi$:

$$\vec{n}_\rho=(B-A)\times(C-A)=(1,2,-2)\times(-1,2,-2)=$$
$$=\left(\begin{vmatrix}2&-2\\2&-2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&-2\\-1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-1&2\end{vmatrix}\right)=\underline{(0,4,4)}$$

$$\vec{n}_\varphi=(E-D)\times(F-D)=(2,0,-4)\times(3,0,1)=$$
$$=\left(\begin{vmatrix}0&-4\\0&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2&-4\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix}\right)=\underline{(0,-14,0)}$$

$\Rightarrow$ $\vec{n}_\rho\neq k\vec{n}_\varphi$ $\Rightarrow$ ρ a φ jsou různoběžné.

b) Určete obecné rovnice rovin ρ a φ.

$\vec{n}_\rho=(0,4,4)\Rightarrow \rho:\ 0x+4y+4z+d=0 \ /\ A=[1,-1,3]\in\rho\Rightarrow$

$0\cdot1+4\cdot(-1)+4\cdot3+d=0$

$8+d=0$

$d=-8$

$$\underline{\underline{\rho:\ 4y+4z-8=0}}$$

$\vec{n}_\varphi=(0,-14,0)\Rightarrow\varphi:\ 0x-14y+0z+d=0\ /\ D=[0,1,3]\in\varphi\Rightarrow$

$0\cdot0-14\cdot1+0\cdot3+d=0$

$d=14$

$\varphi:\quad -14y+14=0\quad /:(-14)$

$$\underline{\underline{\varphi:\ y-1=0}}$$

Tj. $y=1$. V rovině φ leží všechny body z E_3, jejichž y-ová souřadnice je rovna 1 (srovnej se zadáním).

Př.: Roviny ρ a φ jsou dány obecnými rovnicemi. Nalezněte (existuje-li) jejich průsečnici p.

1.) $\rho: 4y+4z-8=0 \qquad \varphi: y-1=0$

Řešíme soustavu dvou rovnic o třech neznámých (x, y, z):

$$\begin{array}{l} 4y+4z-8=0 \;/:4 \\ y-1=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y+z=2 \\ y=1 \end{array} \Rightarrow 1+z=2 \Rightarrow \underline{z=1}$$

Zjistili jsme, že $z=1$, $y=1$ a x může být libovolné $\Rightarrow$

$$p: \begin{array}{l} x=t\in\mathbb{R} \\ y=1 \\ z=1 \end{array} \Rightarrow p: \begin{array}{l} x=0+1t \\ y=1+0t \\ z=1+0t \end{array}$$

$\Rightarrow$ Přímka p je dána bodem $[0,1,1]$ a vektorem $(1,0,0)$.

2.) $\rho: x+2y+3z+1=0 \qquad \varphi: x-y+z+2=0$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z+1=0 \\ x-y+z+2=0 \;/-r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow -3y-2z+1=0 \;\} \Rightarrow \underbrace{-3t-2z+1=0}_{\Downarrow} \;\} \Rightarrow$$

volím parametr $y=t\in\mathbb{R}$

$$z=\frac{1-3t}{2}$$

$y=t$ a $z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t$ dosadíme do 1. rovnice $\Rightarrow$

$$x+2t+3\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}t\right)+1=0$$

$$x+2t-\tfrac{9}{2}t+\tfrac{3}{2}+1=0$$

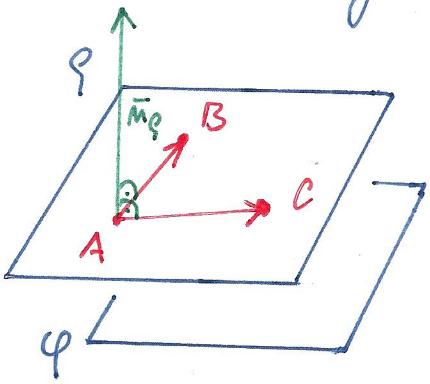
$$x-\tfrac{5}{2}t+\tfrac{5}{2}=0 \;\} \Rightarrow x=-\tfrac{5}{2}+\tfrac{5}{2}t \quad \Rightarrow$$

$$p: \begin{array}{l} x=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}t \\ y=t \\ z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t \end{array}$$

Př.: Rovina ϱ je dána body $A=[1,3,-1]$, $B=[2,1,4]$, $C=[1,1,3]$.

Rovina φ je dána obecnou rovnicí $x-2y-z=3$.

Určete vzájemnou polohu ϱ a φ.



Nejprve určíme $\vec{n}_\varrho$:

$$\vec{n}_\varrho = (C-A)\times(B-A) = (0,-2,4)\times(1,-2,5) =$$

$$= \Big(\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}_{-10+8},\ \underbrace{-\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{-(0-4)},\ \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}_{0-(-2)} \Big) = (-2,4,2)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n}_\varrho = (-2,4,2) = -2(1,-2,-1) = -2\cdot\vec{n}_\varphi$$

$\Rightarrow$ Roviny ϱ a φ jsou buď totožné, nebo rovnoběžné různé.

Stačí ověřit, zda $A=[1,3,-1]$ $\in\varrho$ leží v rovině φ (potom by byly totožné). Dosadíme souřadnice A do rovnice roviny φ:

$$x-2y-z=3$$
$$1-2\cdot 3-(-1)=3$$
$$1-6+1=3$$
$$-4=3 \quad \text{Spor!} \Rightarrow A\notin\varphi$$

$\Rightarrow$ ϱ a φ jsou rovnoběžné různé.

Pozn.: Euklidovskou vzdáleností bodů $A=[a_1,a_2,a_3]$ a $B=[b_1,b_2,b_3]$ nazveme číslo

$$|AB| = \sqrt{(A-B)\cdot(A-B)} = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$$

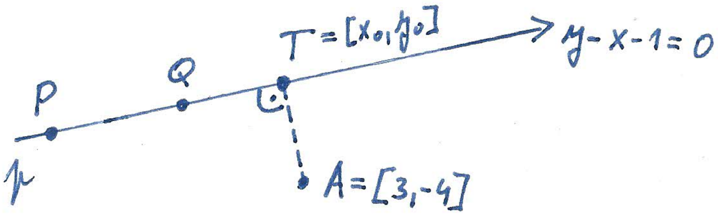
skalární součin.

Př: Nalezněte euklidovskou vzdálenost bodů $A=[1,2,-1]$ a $B=[3,1,4]$

$$A-B = [1,2,-1]-[3,1,4] = (-2,1,-5) \Rightarrow$$

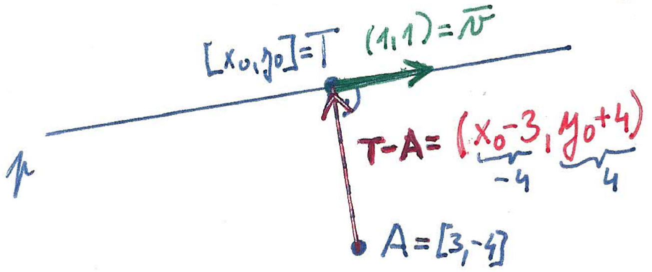
$$|AB| = \sqrt{(-2,1,-5)(-2,1,-5)} = \sqrt{(-2)^2+1^2+(-5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \underline{\underline{\sqrt{30}}}$$

Př: Určete vzdálenost bodu $A=[3,-4]$ od přímky $p: y-x-1=0$



$$|Ap| = |AT| = |T-A|$$

Nalezneme dva body ležící na p (tak aby vyhovovaly jejich souřadnice rovnici $y-x-1=0$). Například $P=[1,2]$ a $Q=[0,1]$. Směrovým vektorem přímky p je potom $P-Q=(1,1)=\vec{v}$



Vektory $T-A=(x_0-3,y_0+4)$ a $\vec{v}=(1,1)$ na sebe musí být kolmé $\Leftrightarrow$ Jejich skalární součin je roven 0.

$$\Rightarrow (1,1)\cdot(x_0-3, y_0+4) = 0$$

$$1\cdot(x_0-3)+1\cdot(y_0+4) = 0$$

$$x_0-3+y_0+4 = 0$$

$$x_0+y_0+1 = 0 \quad / \; T=[x_0,y_0]\in p \Rightarrow y_0-x_0-1=0 \Rightarrow y_0=x_0+1$$

$$x_0+\underbrace{x_0+1}+1 = 0$$

$$x_0=-1 \Rightarrow y_0=-1+1=0 \Rightarrow T=[-1,0] \Rightarrow T-A=(-4,4)$$

$$\Rightarrow |Ap| = |AT| = |T-A| = |(-4,4)| = \sqrt{(-4,4)(-4,4)} = \sqrt{(-4)^2+4^2} = \underline{\underline{\sqrt{32}}}$$