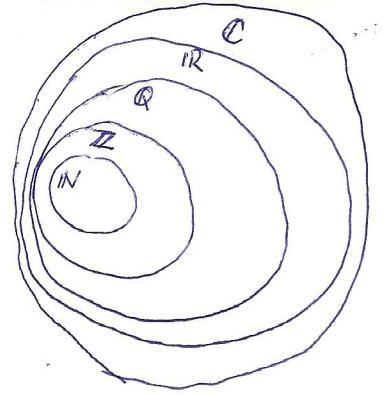


Číselné obory



Přirozená čísla: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Operace na \mathbb{N} : sčítání

pr: $1 + 1 = \underline{\underline{2}}$

násobení

$2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$

Celá čísla: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Operace na \mathbb{Z} : sčítání

pr: $2 + (-3) = \underline{\underline{-1}}$
známé obvykle bez + ale včítáme -3

násobení

$(-2)(-4) = \underline{\underline{8}}$

Racionální čísla: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$

Operace na \mathbb{Q} : sčítání

pr: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{b \cdot d}$

násobení

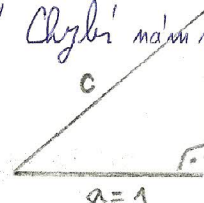
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

pr: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

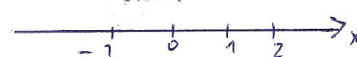
$\frac{6}{2} + \frac{3}{4} = \frac{24+6}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$

Pozn. Množina racionálních čísel není "úplná". Chybí nám v ní některá čísla, se kterými je třeba pracovat. Např.



$\Rightarrow c$ nelze vyjádřit pomocí racionálních čísel ($c = \sqrt{2}$)

\Rightarrow Ne každý bod na "číselné ose" je racionální!!!



Pr:
mi: Dokažte, že $c = \sqrt{2}$ není racionální číslo.

Důkaz: Sporem: Předpokládáme, že $c = \sqrt{2}$ je racionální číslo, tedy že existují čísla $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{navíc pořadujeme, aby } p \text{ a } q \text{ byly nesoumělné čísla (to můžeme - vždycky ve zlomku můžeme jejich společně ho dělitele, vykrátit.)}$$
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\boxed{p^2 = 2q^2} \quad *$$

\Downarrow
 p^2 je sudé (může být p liché? ne, protože liché kvádr liché je zase liché číslo $\Rightarrow p^2$ by bylo liché)

\Downarrow
 p je sudé

\Downarrow
 $\exists k \in \mathbb{Z}: p = 2k$ dosadíme do *

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2 \quad | :2$$

$$2k^2 = q^2$$

q^2 je sudé

q je sudé

$\exists m \in \mathbb{Z}: q = 2m$

\Downarrow
 $p = 2k \wedge q = 2m \Rightarrow$ jsou sudé!!!
(obě jsou dělitelné dvěma)

spat! - předpokládáme, že p a q jsou nesoudělné

\Rightarrow Pokud $c = \sqrt{2}$ je racionální \Rightarrow p a q jsou nesoudělné \wedge sudé, není jisté pravda

\Downarrow
předpoklad není pravda

\Downarrow
 $c = \sqrt{2}$ není racionální číslo!

□

Reálná čísla: \mathbb{R} ... vzniknou "zúplněním" tělesa racionálních čísel

Operace na \mathbb{R} : sčítání + násobení (+ další měřeno definovat)

Pozn. Důležitými podmnožinami reálných čísel jsou tzv. intervaly:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} ; \langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} ; [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Komplexní čísla $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
 $x =$ reálná část $y =$ imaginární část

Operace na \mathbb{C} : sčítání + násobení

Def: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

pr: $(5 + i2) + (4 + i3) = \underline{\underline{9 + i5}}$

$$\begin{aligned} \underset{x_1}{(5 + i2)} \underset{y_1}{(4 + i3)} &= 5 \cdot 4 + i^2 \cdot 2 \cdot 3 + i \cdot 5 \cdot 3 + i \cdot 2 \cdot 4 = \\ &= (5 \cdot 4 - 2 \cdot 3) + i(5 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = \\ &= \underline{\underline{14 + i23}} \end{aligned}$$

LINEÁRNÍ ALGEBRA 1

1.) Komplexní čísla

množina komplexních čísel: $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

i ... imaginární jednotka: $i^2 = -1$

operace na množině \mathbb{C} :

a) sčítání: $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

b) násobení: $(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

Př: Převeďte na algebraický tvar (tj. na tvar $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$).

1. $(1 + 3i)^2 = 1^2 + 6i + (3i)^2 = \underline{\underline{-8 + 6i}}$

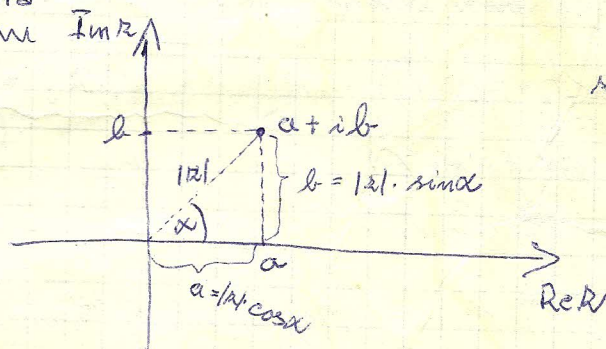
2. $\frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i} \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i}{9+4} = \frac{3+2i}{13} = \underline{\underline{\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i}}$
 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

3. $\frac{6+8i}{1-i} = \frac{(6+8i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(6+8i)(1+i)}{2} = (3+4i)(1+i) = \underline{\underline{-1+7i}}$

4. $(1+i)^{156} = ?$ možno dělat podle binomické věty, ale jednodušší je to pomocí:

Geometrický tvar komplexního čísla

$$a + ib = |z| \cos \alpha + i |z| \sin \alpha$$



z Polh. věty:

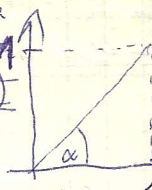
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z + ib = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Využití: V tomto tvaru je možno komplexní čísla snadno násobit, dělit, umocňovat a odmocňovat.

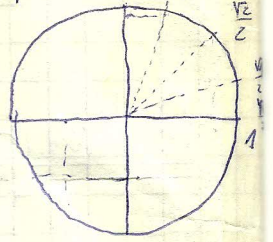
Př. Převěďte na goniom. tvar

1) $1 + i\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$



$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$



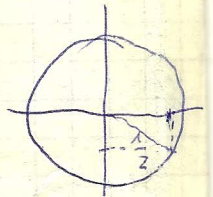
2) $k = 1 + i \Rightarrow |k| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$\Rightarrow k = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

3) $2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow |k| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$, $\cos \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow k = 4 (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

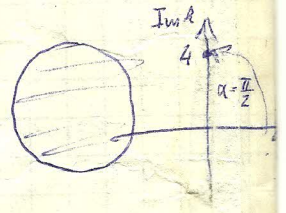
3) $3 - \sqrt{3}i \Rightarrow |k| = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \frac{11\pi}{6}$



$\Rightarrow k = 2\sqrt{3} (\cos(\frac{11\pi}{6}) + i \sin(\frac{11\pi}{6}))$

4) $0 + 4i \Rightarrow |k| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$, $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$k = 4 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$



Pozor!

5) $0 - 4i \Rightarrow |k| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$, $\alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$

$k = 4 (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$

Násobení a dělení v goniometrickém tvaru

$k_1 = |k_1| (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$

$k_2 = |k_2| (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$

\Rightarrow

$$k_1 \cdot k_2 = |k_1| \cdot |k_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{|k_1|}{|k_2|} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))$$

Př:

1) $k_1 = 3 (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$

$k_2 = 6 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

$\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 18 (\cos 65^\circ + i \sin 65^\circ)$

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{2} (\cos(-25^\circ) + i \sin(-25^\circ)) =$

$= \frac{1}{2} (\cos 335^\circ + i \sin 335^\circ)$

Umocňování a odmocňování v goniometrickém tvaru

Pro libovolné přirozené číslo n platí: jestliže $z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ pak

$$z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad \alpha \text{ v radiánech}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

α ve stupních $\Rightarrow \alpha + k \cdot \frac{360^\circ}{n}$

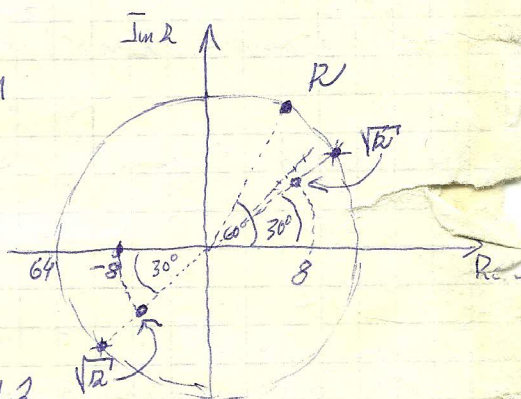
Pr.
1. $z = 64 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \Rightarrow$

a) $z^2 = 64^2 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 64^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{64^2}{2} \sqrt{3} - i \frac{64^2}{2}$

$z^3 = 64^3 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 64^3 (-1 + i \cdot 0) = -64^3$

b) $\sqrt[2]{z} = \sqrt[2]{64} \left(\cos \frac{60^\circ + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{60^\circ + 2k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1$

$\Rightarrow \sqrt[2]{z} = 8 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
 $\Rightarrow \sqrt[2]{z} = 8 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

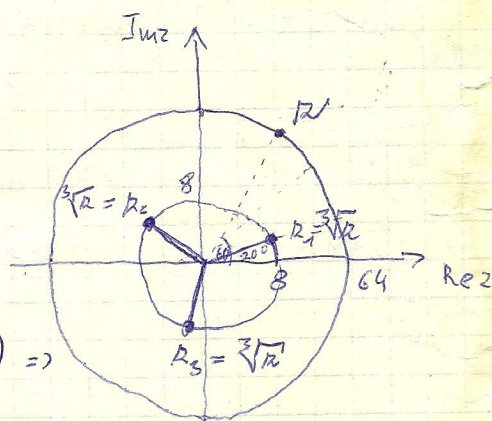


$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} \left(\cos \frac{60^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{60^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2$

$\sqrt[3]{z} = 4 \cdot (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$

$\sqrt[3]{z} = 4 \cdot (\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)$

$\sqrt[3]{z} = 4 \cdot (\cos 260^\circ + i \sin 260^\circ)$



2. $z = (1+i)^3 \Rightarrow \sqrt[4]{z} = ?$

$z = (\sqrt{1^2+1^2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}))^3 = (\sqrt{2})^3 (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\sqrt{2}^3} (\cos \frac{3}{16}\pi + i \sin \frac{3}{16}\pi) = 2^{\frac{3}{8}} (\cos \frac{3}{16}\pi + i \sin \frac{3}{16}\pi)$

$= 2^{\frac{3}{8}} (\cos (\frac{3}{16}\pi + \frac{2\pi}{4}) + i \sin (\frac{3}{16}\pi + \frac{2\pi}{4})) = 2^{\frac{3}{8}} (\cos \frac{11}{16}\pi + i \sin \frac{11}{16}\pi)$

$= 2^{\frac{3}{8}} (\cos \frac{19}{16}\pi + i \sin \frac{19}{16}\pi)$

$= 2^{\frac{3}{8}} (\cos \frac{27}{16}\pi + i \sin \frac{27}{16}\pi)$

Pr: Určete :

a) $\sqrt[2]{r}$, kde $r = 15 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

b) $\sqrt[3]{r}$, kde $r = 12 \left(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ \right)$

c) $\sqrt[4]{2+2i}$

d) $\sqrt[3]{\frac{12}{3-\sqrt{3}i}}$

ad a) $r = 15 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \sqrt[2]{r} = \begin{cases} \frac{\sqrt{15} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)}{\sqrt{15} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} \right) \right)} = \\ = \frac{\sqrt{15} \left(\cos \left(\frac{13}{12} \pi \right) + i \sin \left(\frac{13}{12} \pi \right) \right)}{\sqrt{15} \left(\cos \left(\frac{13}{12} \pi \right) + i \sin \left(\frac{13}{12} \pi \right) \right)} \end{cases}$

ad b) $r = 12 \left(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ \right) \Rightarrow \sqrt[3]{r} = \begin{cases} = \sqrt[3]{12} \left(\cos \frac{18^\circ}{3} + i \sin \frac{18^\circ}{3} \right) = \sqrt[3]{12} \left(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ \right) \\ \sqrt[3]{12} \left(\cos \left(\frac{18^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} \right) + i \sin \left(\frac{18^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{12} \left(\cos 126^\circ + i \sin 126^\circ \right) \\ \sqrt[3]{12} \left(\cos \left(\frac{18^\circ}{3} + 2 \frac{360^\circ}{3} \right) + i \sin \left(\frac{18^\circ}{3} + 2 \frac{360^\circ}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{12} \left(\cos 246^\circ + i \sin 246^\circ \right) \end{cases}$

ad c) $\sqrt[4]{2+2i} = ? \Rightarrow$ označme $2+2i = r$ a určíme goniometrický tvar r :

$$|r| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow r = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{2+2i} = \sqrt[4]{r} = \begin{cases} = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right) \\ = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{9}{16} \pi + i \sin \frac{9}{16} \pi \right) \\ = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{16} + 2 \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{16} + 2 \frac{2\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{17}{16} \pi + i \sin \frac{17}{16} \pi \right) \\ = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{16} + 3 \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{16} + 3 \frac{2\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{25}{16} \pi + i \sin \frac{25}{16} \pi \right) \end{cases}$$

$$\text{ad d) } \sqrt[3]{\frac{12}{3-\sqrt{3}i}} = ?$$

označme $k = \frac{12}{3-\sqrt{3}i}$. Abychom převedli k na goniometrický tvar, nejprve jej převedeme na algebraický tvar:

$$k = \frac{12}{3-\sqrt{3}i} = \frac{12}{3-\sqrt{3}i} \cdot \frac{(3+\sqrt{3}i)}{(3+\sqrt{3}i)} = \frac{12(3+\sqrt{3}i)}{3^2 - (\sqrt{3}i)^2} = \frac{12(3+\sqrt{3}i)}{9+3} = 3+\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = \underline{2\sqrt{3}}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow k = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{12}{3-\sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{k} = \begin{cases} \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right) \\ \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \left(\cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18} \right) \\ \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{18} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{18} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \left(\cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18} \right) \end{cases}$$

Pr: V Gaussové rovině znázorněte všechna $z \in \mathbb{C}$ splňující:

a) $|z|=1$

b) $|z| \leq 2$

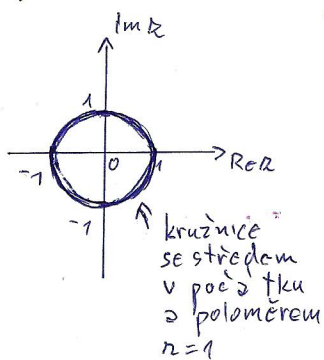
c) $1 \leq |z| < 2$

d) $|z-3| \leq 1$

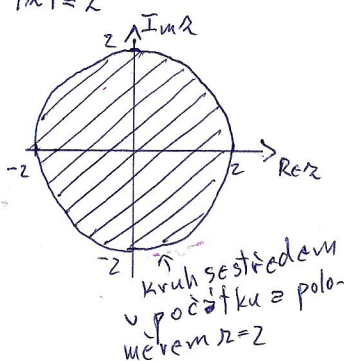
e) $|z-2i| \leq 2$

f) $|z-(1+i)| \leq 0,5$

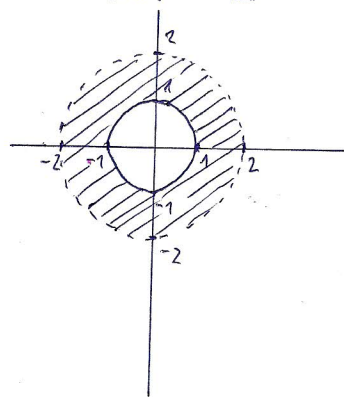
ada) $|z|=1$



adb) $|z| \leq 2$



adc) $1 \leq |z| < 2$



add) $|z-3| \leq 1$

